



SÈRIE 1

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

1. En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte. [2 punts]

Considerem les variables x , y i z , que representen el nombre de participants que escullen el producte A, B i C, respectivament.

Obtenim el sistema d'equacions següent

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ y = x + z + 32 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 2x - y = 0 \\ x - y + z = -32 \end{cases}$$

Apliquem per resoldre'l el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -32 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 3 & 2 & 1.000 \\ 0 & 2 & 0 & 532 \end{array} \right).$$

Es veu clarament que és suficient intercanviar la segona i la tercera columnes per tenir la matriu diagonalitzada i, per tant, podem concloure que és un sistema compatible determinat. En la resolució s'obté $x = 133$, $y = 266$ i $z = 101$.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.



2. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = \mathbf{0}$, en què I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la. [1 punt]

b) Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu A , és a dir, que compleixen que $A \cdot B = B \cdot A$. [1 punt]

a) Comencem calculant M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim el sistema:

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que ens dona el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 14 + 2a + b = 0 \\ 5 + 5a = 0 \\ 2 + 2a = 0 \\ 11 - a + b = 0 \end{cases}$$

Tant de la segona com de la tercera equacions deduïm que $a = -1$, i substituint el valor de a , tant a la primera com a la quarta equació, obtenim que $b = -12$.

b) Hem de trobar els valors de x, y, z i t per als quals es compleix que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si fem els dos productes cal que es compleixi la igualtat:

$$\begin{pmatrix} z & t \\ x - z & y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x - y \\ t & z - t \end{pmatrix}.$$

Per tant, cal que $z = y$, $t = x - y$, $x - z = t$ (però com que $z = y$, tornem a obtenir que $t = x - y$) i $y - t = z - t$ (que ens torna a donar que $z = y$).

Per tant, les úniques condicions que hem obtingut són $z = y$ i $t = x - y$. És a dir, la matriu A commutarà amb totes les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x - y \end{pmatrix},$$

per a qualsevol valor de x i de y .

Criteris de correcció: a) Càlcul de M^2 : 0,25 p. Obtenció de les equacions: 0,25 p. Obtenció dels valors de a i b : 0,5 p. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul dels productes de matrius: 0,25 p. Obtenció del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.



3. La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt $(-2, -6)$ i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix d'abscisses.

- a) Calculeu el valor de a . [1 punt]
b) Calculeu el valor de b . [1 punt]

a) Sabem que la recta tangent en el punt $(-2, -6)$ és paral·lela a l'eix d'abscisses, per tant, el seu pendent és 0. Calculem la derivada de la funció

$$f'(x) = a - \frac{8}{x^2}.$$

Per tant, $f'(-2) = a - 2$. Imposem que $f'(-2) = 0$ i trobem que $a = 2$.

b) Sabem que la funció passa pel punt $(-2, -6)$. Per tant, sabem que $f(-2) = -6$. Tenim per tant que $2 \cdot (-2) + b + \frac{8}{(-2)} = -6$, que ens dona $b - 8 = -6$ i, finalment, $b = 2$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Saber que el pendent ha de ser 0: 0,25 p. Obtenció del valor de a : 0,5 p. b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor de b : 0,5 p.

4. La funció $f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$ ens mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x , en què x és el dia del mes de febrer.

a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer? [0,75 punts.]

b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitat se'n van vendre? [1,25 punts.]

- a) D'una banda $f(5) = 1$. Per tant, el dia 5 de febrer es van vendre, aproximadament, 1.000 unitats de perfum.

D'altra banda, $f(7) = 2$ i $f(9) = 5$. Per tant, entre el dia 7 i el dia 9 hi ha un increment aproximat de vendes de 3.000 unitats de perfum.

- b) Per trobar el màxim de vendes, cal fer la derivada:

$$f'(x) = \frac{-40 \cdot (2x - 22)}{(x^2 - 22x + 125)^2}.$$

Si igualem la derivada a zero, trobem que hi ha un possible extrem relatiu en $x = 11$. Si fem un estudi del signe de la derivada, observem que, per a x menor d'11, la derivada és positiva, i, per tant, la funció creix, mentre que per a x més gran d'11, la derivada és negativa, i, per tant, la funció decreix. Deduïm, per tant, que en $x = 11$ hi ha un màxim.

Observem que $f(11) = 10$. Per tant, el dia que es van vendre més perfums va ser el dia 11 de febrer i se'n van vendre aproximadament 10.000 unitats.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les vendes del dia 5: 0,25 p. Càlcul de les vendes dels dies 7 i 9 i càlcul de l'increment de vendes entre aquests dies: 0,5 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del valor de vendes d'aquest dia: 0,25 p.



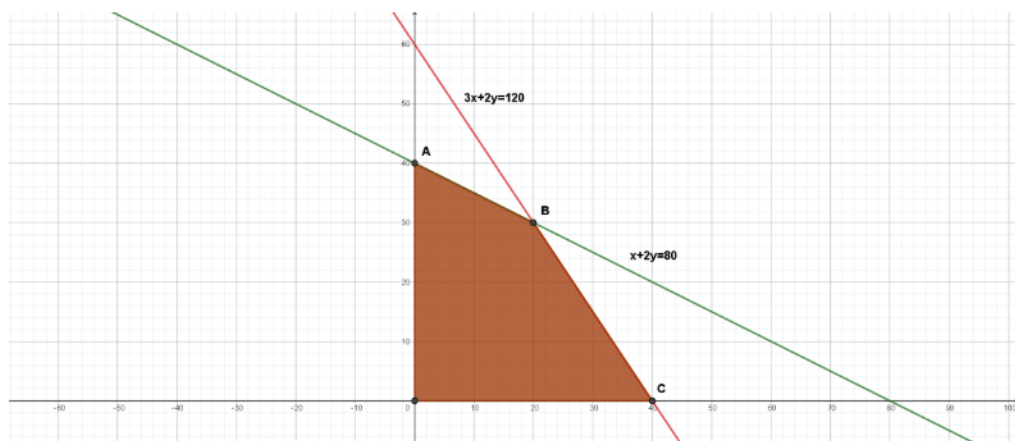
5. En una fàbrica es disposa de 80 kg d'acer i 120 kg d'alumini per fabricar bicicletes de muntanya i de passeig que es vendran a 200 € i 150 €, respectivament. Per a fabricar una bicicleta de muntanya són necessaris 1 kg d'acer i 3 kg d'alumini, i per a fabricar-ne una de passeig, 2 kg de cada un dels dos metalls.
- Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. [1,25 punts]
 - Calculeu quantes bicicletes de cada tipus s'han de fabricar per a obtenir el màxim benefici i digueu quin és aquest benefici. [0,75 punts]

Segons l'enunciat el sistema d'inequacions és

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

on x representa el nombre de bicicletes de muntanya que cal fabricar i y el nombre de bicicletes de passeig.

La regió del pla solució del sistema d'inequacions és:



Es tracta d'una regió tancada del pla amb vèrtexs als punts $A = (0,40)$, $B = (20,30)$, $C = (40,0)$ i $D = (0,0)$.

La funció que dona el benefici és: $B(x, y) = 200x + 150y$.

El màxim s'assoleix en un dels vèrtexs de la regió solució. Si avaluem la funció anterior en cada un dels vèrtexs:



$$\begin{aligned}B(0,0) &= 0 \\B(0,40) &= 6.000 \\B(20,30) &= 8.500 \\B(40,0) &= 8.000\end{aligned}$$

Per tant, el benefici màxim és de 8.500 € i s'obté si es fabriquen 20 bicicletes de muntanya i 30 de passeig.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

6. Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Se sap que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t) = -5(m - t)^2 + n, \\ \text{per a } 10 \leq t \leq 21$$

- a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.

[1 punt]

- b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.

[1 punt]

- a) La derivada de la funció $I(t)$ ve donada per $I'(t) = -10(m - t)(-1) = 10(m - t)$. Sabem que en $t = 18$ hi ha un extrem relatiu, per tant, $I'(18) = 0$, és a dir, $10(m - 18) = 0$, i obtenim que $m = 18$.

- b) També sabem que $I(21) = -5(18 - 21)^2 + n = 500$, i, per tant, obtenim que $n = 545$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Igualació del valor de la derivada en el punt $t = 18$ a 0: 0,25 p. Obtenció del valor de m : 0,25 p. b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor de n : 0,5 p.



SÈRIE 4

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

- c) Considereu la funció $f(x) = 2x^3 + ax$. Calculeu el valor de la constant a per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$. Digueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim i doneu també el valor que pren la funció $f(x)$ en aquest punt. [2 punts]

Comencem calculant la derivada de la funció $f(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 + a.$$

Per tal que la funció tingui un extrem relatiu en $x = -1$ cal que en aquest punt s'anul·li la derivada. Imposant doncs que $f'(-1) = 0$ trobem que $a = -6$. Per tant la funció és $f(x) = 2x^3 - 6x$ i la derivada $f'(x) = 6x^2 - 6$. Observem que $f'(x) > 0$ per $x < -1$ i que $f'(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$. Per tant la funció $f(x)$ és creixent en l'interval $(-\infty, -1)$ i és decreixent en l'interval $(-1, 1)$. Així doncs en el punt $x = -1$ hi trobem un màxim relatiu.

Finalment ens demanen $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) = 4$.

Criteris de correcció: Càlcul de la derivada: 0,5 p. Imposar que la derivada en el punt s'anul·li i trobar el valor de a: 0,5 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,75 p. Càlcul del valor de la funció en el punt: 0,25 p.

- d) L'empresa d'esport d'aventura Xtrem prepara per a la darrera setmana de juny dos paquets: el paquet bàsic (PB) i el paquet súper (PS). El PB inclou una baixada de ràfting, una baixada fent barranquisme i un salt de pont, i té un preu de 50€. D'altra banda, el PS inclou tres baixades de ràfting, dues fent barranquisme i un salt de pont, i el preu és de 120€. Per limitacions climàtiques i de personal, només es poden fer 12 baixades de ràfting, 9 fent barranquisme i 8 salts de pont. Per a fer la promoció turística, es vol saber quina combinació de paquets proporciona més ingressos.



- a) Trobeu les inequacions que han de complir totes les possibles combinacions de paquets. Dibuixeu la regió del pla en què es troben aquestes possibles solucions i trobeu la funció que dona els ingressos en funció del nombre de paquets de cada tipus. [1,25 punts]
- b) Trobeu el nombre de paquets de cada tipus que ha d'oferir l'empresa per a obtenir els ingressos màxims i digueu quins serien aquests ingressos. [0,75 punts]

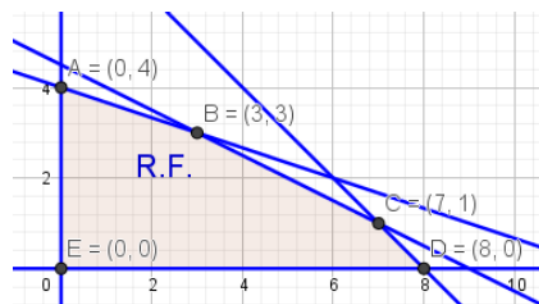
- a) Anomenem x el nombre de paquets PB venuts i y el nombre de paquets PS venuts. Tenim les següents dades:

Paquets	PB (x)	PS (y)	Disponible
Ràfting	1	3	12
Barranquisme	1	2	9
Pònting	1	1	8
Preu (€)	50	120	

I, per tant, tenim les següents restriccions:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x + 2y \leq 9 \\ x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si les representem gràficament obtenim:



D'altra banda, la funció objectiu serà $Guanys(x, y) = 50x + 120y$.

- b) Per saber quins són els ingressos màxims hem d'avaluar la funció objectiu en cada uns dels vèrtexs de la regió factible:

$$Guanys(A(0,4)) = 50 \cdot 0 + 120 \cdot 4 = 480 \text{ €}$$

$$Guanys(B(3,3)) = 50 \cdot 3 + 120 \cdot 3 = 510 \text{ €}$$



$$\text{Guany}(C(7,1)) = 50 \cdot 7 + 120 \cdot 1 = 470 \text{ €}$$

$$\text{Guany}(D(8,0)) = 50 \cdot 8 + 120 \cdot 0 = 400 \text{ €}$$

$$\text{Guany}(E(0,0)) = 50 \cdot 0 + 120 \cdot 0 = 0 \text{ €}$$

Per tant, per obtenir els màxims beneficis caldrà vendre 3 paquets de cada tipus, PB i PS, i els ingressos que obtindrem seran de 510 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

- 3 Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6},$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

- a) Justifiqueu que la funció f és estrictament decreixent quan $x \geq 0$. [0,75 punts]
b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pes a llarg termini? Argumenteu si aquest valor límit s'assolirà en algun moment. [1,25 punts]
- a) Tenint en compte que x és el nombre de mesos seguint la dieta cal considerar $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$. En aquest interval la funció f no presenta cap discontinuïtat, ja que l'únic valor de x pel qual s'anul·la el denominador és $x = -6$. Per estudiar si la funció és decreixent en aquest interval caldrà calcular la funció derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{-132}{(x+6)^2}.$$

L'equació $f'(x) = 0$ no presenta cap solució i veiem clarament que $f'(x) < 0$ per a tot $x \geq 0$. Així doncs la funció és estrictament decreixent en tot el seu domini.

- b) El pes inicial del pacient serà $f(0) = \frac{510}{6} = 85$. Al cap de dos mesos pesaria $f(2) = 79,5$ kg. Per saber a quin valor tendeix el pes cal calcular el límit de $f(x)$ quan $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{63x+510}{x+6} = 63.$$

Aquest valor no s'assolirà mai ja que la funció és estrictament decreixent per a tot $x \geq 0$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Justificació de que la funció és decreixent per $x \geq 0$: 0,5 p. b) Càlcul del pes inicial: 0,25 p. Càlcul del pes als dos mesos: 0,25 p. Càlcul del límit: 0,5 p. Justificació de que no s'assoleix: 0,25 p.



- 4 Per la Festa Major, la pastisseria del poble elabora unes capsas de bombons especials. La capsa petita conté 10 bombons, la mitjana té 15 bombons i la gran en té 25. Cada capsa va decorada amb una llaç commemoratiu. En total han utilitzat 210 llaços i 2.650 bombons. Tenint en compte que han elaborat el doble de capsas petites que de mitjanes i grans juntes, quantes capsas de cada tipus han elaborat? [2 punts]

Sigui x la quantitat de capsas de bombons petites elaborades, y la quantitat de capsas mitjanes i z la quantitat de grans.

A partir de les condicions de l'enunciat obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \\ 10x + 15y + 25z = 2.650 \\ 2 \cdot (y + z) = x \end{cases}$$

Que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \\ 2x + 3y + 5z = 530 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Si el resollem pel mètode de Gauss obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 2 & 3 & 5 & 530 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & -3 & -3 & -210 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & 0 & -6 & -120 \end{array} \right).$$

I d'aquí deduïm que $x = 140$, $y = 50$ i $z = 20$.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

- 5 Un comerciant pot comprar articles a 350 € la unitat. Si els ven a 750 € la unitat, en ven 30. Sabem que la relació entre aquestes dues variables (el preu de venda i el nombre d'unitats venudes) és lineal i que, per cada descompte de 20 € en el preu de venda, incrementa les vendes en 3 unitats. Considerant que el comerciant només comprarà el nombre d'articles que sap que vendrà:
- Escriuiu la funció de beneficis a partir del nombre de vegades x que s'aplica el descompte. [1 punt]
 - Determineu el preu de venda que fa màxims els beneficis del comerciant i justifiqueu que és un màxim. Determineu quantes unitats vendrà. [1 punt]
- a) Anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte de 20 €. La funció que dona el benefici del comerciant és el producte entre dels diners que guanya per cada unitat venuda pel nombre d'unitats que ven:



$$B(x) = (400 - 20x) \cdot (30 + 3x) = -60x^2 + 600x + 12.000.$$

- b) Per trobar el punt on s'assoleix el màxim derivem la funció $B(x)$:

$$B'(x) = -120x + 600.$$

Si igualem la derivada a zero veiem que hi ha un extrem relatiu en el punt $x = 5$. Veiem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per $x < 5$ i és negativa per $x > 5$.

Per tant el preu de venda és $750 - 5 \cdot 20 = 650$ €. D'altra banda, mensualment es vendran $30 + 5 \cdot 3 = 45$ unitats.

Criteris de correcció: a) Obtenció dels guanys per unitat venuda en funció de x : 0,25p. Obtenció del nombre d'unitats venudes en funció de x : 0,25p. Obtenció de la funció de beneficis: 0,5p. b) Obtenció del punt on s'assoleix en màxim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del preu de venda: 0,25 p. Càlcul del nombre d'unitats venudes: 0,25p.

6. En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu P ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1, A2$ i $A3$, segons els proveïdor $p1, p2$ i $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

- a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$. [0,5 punts]
b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per tota la comanda? Quin és aquest preu? [1,5 punts]

- a) Quan fem el producte de la comanda C per la matriu de preus unitaris P obtenim un vector fila que és el preu total de la comanda per cadascun dels tres proveïdors.

- b) En aquest cas el vector de la comanda és $C = (25 \ 10 \ 15)$. Calculem el producte $C \cdot P$:

$$(25 \ 10 \ 15) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (430 \ 415 \ 410).$$

Per tant el preu total de la comanda és de 430 € pel proveïdor $p1$, de 415 € pel proveïdor $p2$ i de 410 € en el cas del proveïdor $p3$.

Així doncs el millor preu del total de la comanda ens l'ofereix el proveïdor $p3$ i és de 410 €.

Criteris de correcció: a) Explicació del que representa el producte $C \cdot P$: 0,5 p. b) Escriure la comanda com a vector C : 0,25 p. Càlcul del producte $C \cdot P$: 0,75 p. Obtenció del proveïdor que ofereix un millor preu total: 0,25 p. Obtenció del preu: 0,25 p.