SERIE 1

1. Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la.
Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les, 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €.
Quantes publicacions va vendre de cada tipus? *[2,5 punts]*

Si anomenem x el nombre de còmics venuts, y el nombre de revistes venudes i z el nombre de novel·les venudes, sabem que:

$$\begin{aligned} y &= 2z \\ x &= y-5 \\ x+1{,}5y+2z &= 30 \end{aligned}$$

Per tant, hem de resoldre el sistema:

$$\begin{aligned} x-y &= -5 \\ y-2z &= 0 \\ 2x+3y+4z &= 60 \end{aligned}$$

El resolem utilitzant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 60 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 70 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 70 \end{array}\right)$$

D'on obtenim que $x = 5$, $y = 10$ i $z = 5$. És a dir, s'han venut 5 còmics, 10 revistes i 5 novel·les.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 1 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,5 p.

2. L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau $f(x) = 10\,x^3 - 210\,x^2 + 1470\,x$ ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què x denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir, $x \in [0,12]$).
   a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any? Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12. *[1,25 punts]*
   b) Comproveu que la funció és creixent en l'interval $[0,12]$ i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent. *[1,25 punts]*

a) Per saber les unitats venudes al cap de 3 mesos cal calcular $f(3) = 2.790$, per tant, s'havien venut 2.790 unitats. Al cap d'un any es van vendre $f(12) = 4.680$ unitats.

Pel que fa a la taxa de variació mitjana, tenim que

$$TVM(3,12) = \frac{f(12) - f(3)}{12 - 3} = \frac{4.680 - 2.790}{9} = 210\,.$$

b) Com que f és una funció polinòmica de grau 3, és contínua i derivable en tots els reals. Per estudiar el creixement de la funció comencem calculant la funció derivada:

$$f'(x) = 30x^2 - 420\,x + 1.470.$$

Igualem $f'(x) = 0$ per obtenir els possibles màxims i mínims. L'únic zero el trobem en el punt d'abscissa $x = 7$. Observem que $f'(x) = 30(x-7)^2$, per tant, deduïm fàcilment que $f'(x) \geq 0$ per a tots els reals, i que $f'(x) = 0$ només per a $x = 7$. Així doncs, la funció f és creixent per a $x \in [0,12]$ i l'instant en què el creixement és més lent és als 7 mesos del llançament del producte (és on la funció derivada assoleix el valor mínim).

Criteris de correcció: a) Obtenció de les unitats venudes als 3 mesos: 0,25 p. Obtenció de les unitats venudes al cap de l'any: 0,25 p. Obtenció de la TVM: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Justificació que la funció és creixent: 0,5 p. Obtenció del punt on el creixement és més lent: 0,5 p.

3. El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.
   a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú. *[1,25 punts]*
   b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu? *[1,25 punts]*

a) Comencem fent un esquema del plantejament. Anomenem x el sobrepreu sobre els 18 €.

Preu menú (€)	Benefici (€)	Nombre de clients	Benefici total (€)
18	10	120	$10 \cdot 120 = 1.200$
$18 + x$	$10 + x$	$120 - 4x$	$(10 + x)(120 - 4x)$

Per tant, la funció que expressa el benefici del restaurant és
$$B(x) = (10 + x)(120 - 4x) = 1200 + 80x - 4x^2.$$

b) Observem que la funció benefici és una paràbola amb coeficient de grau 2 negatiu i, per tant, tindrà el seu màxim en el vèrtex. També podem obtenir aquest màxim derivant i igualant a zero la derivada:
$$B'(x) = 80 - 8x.$$

Igualant a zero obtenim que hi ha un extrem relatiu en $x = 10$. Veiem clarament que es tracta d'un màxim perquè $B'(x) > 0$ per $x < 10$ i $B'(x) < 0$ per $x > 10$.

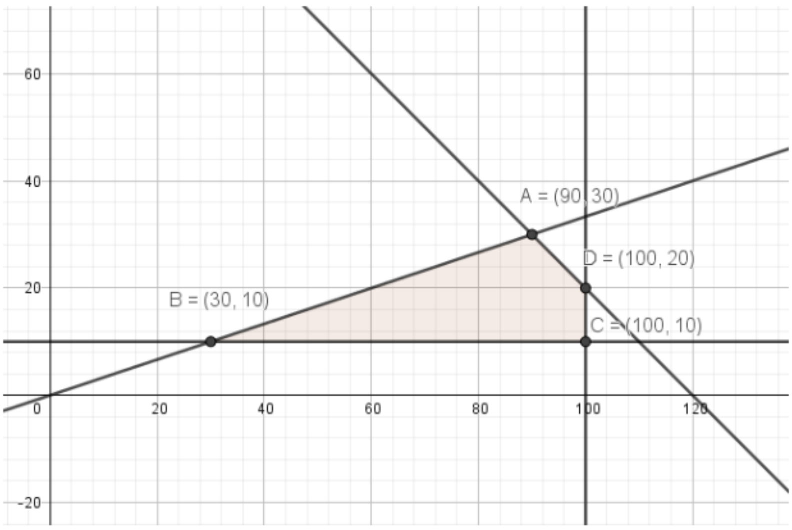
Per tant, es conclou que per maximitzar els beneficis el restaurant ha d'apujar el menú en 10 €. El preu final del menú serà de 28 € i el benefici màxim obtingut amb aquest preu serà de $B(10) = 1.600$ €.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció de la funció de beneficis: 0,75p. b) Obtenció dels euros que s'ha d'apujar el menú: 0'5 p. Justificació que és un màxim: 0,25 p. Obtenció del preu final del menú: 0,25 p. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

4. Un fabricant de mobles de jardí fabrica cadires i taules de fusta d'exterior. Cada cadira li aporta un benefici de 20 € i cada taula un de 25 €. Sabem que cada mes pot produir com a màxim un total de 120 mobles entre els dos productes. També sabem que, com a màxim, pot fabricar 100 cadires i que ha de fabricar un mínim de 10 taules. D'altra banda, el nombre de cadires fabricades ha de ser igual o superior al triple de taules fabricades.
   a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b) Quina és la producció mensual que li aporta el màxim benefici un cop venuda? Quin és aquest benefici? *[1,25 punts]*

a) Anomenem x el nombre de cadires fabricades i y el nombre de taules fabricades en un mes.
L'enunciat del problema ens dona les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ 3y \leq x \end{cases}$$



Els beneficis venen donats per la funció $F(x, y) = 20x + 25y$.

b) Si avaluem la funció en els quatre vèrtexs, tenim que:

$$F(90,30) = 2.550 \text{ €}$$
$$F(30,10) = 850 \text{ €}$$
$$F(100,10) = 2.250 \text{ €}$$
$$F(100,20) = 2.500 \text{ €}$$

Per tant, la funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt (90,30) i aquest màxim pren el valor 2.550 €.
Així doncs, per maximitzar els beneficis, cal vendre una producció de 90 cadires i 30 taules. Amb aquesta producció s'aconseguiran 2.550 € de benefici.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   a) Comprova que es compleix que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^2$. *[1,25 punts]*
   b) Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2. *[1,25 punts]*

a) Per fer aquesta comprovació comencem calculant la matriu A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per comprovar que $A^{-1} = A^2$ hem de veure que $A^2 \cdot A = I$. Fem, doncs, el càlcul de $A^2 \cdot A$:

$$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Com que, efectivament hem obtingut que $A^2 \cdot A = \mathrm{I}$ aleshores $A^{-1} = A^2$.

Evidentment, una altra solució correcta alternativa seria trobar A^{-1} i comprovar que efectivament $A^{-1} = A^2$.

b) Si aïllem la X respectant la no commutativitat de les matrius obtenim

$$X = A^{-1} \cdot (I - B).$$

Però com què $A^{-1} = A^2$ podem resoldre l'equació fent

$$X = A^{-1} \cdot (I - B) = A^2 \cdot (I - B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un altre cop tenim una solució alternativa que passaria per considerar $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i trobar la solució del sistema de quatre equacions i quatre incògnites que se'n deriva.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,75 p. Càlculs: 0,5 p. b) Plantejament: 0,75 p. Càlculs: 0,5 p.

6. El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què x indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}.$$

a) Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues? *[1,25 punts]*
b) En quin moment aconsegueix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim? *[1,25 punts]*

a) Per trobar el benefici en el moment en què es posa en funcionament l'empresa hem de calcular $B(0)$. Observem que $B(0) = 0$ i, per tant, en el moment inicial l'empresa no té ni beneficis ni pèrdues.

Per saber quan l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues mirem quan s'anul·la la funció benefici.

$$B(x) = 0 \;\leftrightarrow\; \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9} = 0 \;\leftrightarrow\; x(4x-9) = 0.$$

Per tant $B(x)$ només s'anul·la per $x = 0$ i per $x = \frac{9}{4} = 2{,}25$. Observem, d'altra banda, que $B(x)$ està ben definida per a tot x i que per als valors de $x \in \left(0, \frac{9}{4}\right)$ és positiva. Per tant, l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues quan porta $\frac{9}{4}$ d'any en funcionament, és a dir, als 2 anys i 3 mesos.

b) Per trobar el punt on s'assoleix el màxim, comencem calculant la derivada de la funció $B(x)$:

$$B'(x) = \frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2}.$$

Igualem la derivada a zero: $B'(x) = 0$ i obtenim dues solucions $x = -9$ i $x = 1$. Observem que la derivada, $B'(x)$, és positiva entre $x = 0$ i $x = 1$ i, per tant, el benefici és creixent en aquest interval de temps. A partir de $x = 1$ la funció benefici és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant, en $x = 1$, és a dir, al primer any, la funció benefici assoleix un màxim, i a partir d'aquí la funció benefici disminueix. El valor del benefici màxim és:

$$B(1) = \frac{5+20}{1+9} - \frac{20}{9} = \frac{25}{10} - \frac{20}{9} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18} = 0{,}278 \text{ milions d'euros.}$$

Criteris de correcció: a) Càlcul del benefici inicial: 0,5 p. Càlcul de l'instant on comença a tenir pèrdues: 0,5 p. Justificació de que en aquell instant passa de tenir beneficis a tenir pèrdues (i no al revés): 0,25 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Càlcul del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Comprovació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del benefici màxim: 0,25 p.

SÈRIE 3

1. La taula següent reflecteix el preu unitari, expressat en euros, de tres productes P_1, P_2 i P_3, subministrats a un restaurant per dues empreses diferents E_1 i E_2 :

	E_1	E_2
P_1	6	5
P_2	5	8
P_3	9	7

El restaurant haurà de fer dues comandes. Aquesta setmana necessita 8 unitats del producte P_1, 5 unitats del producte P_2 i 12 unitats del producte P_3. Mentre que per la setmana vinent necessitarà 10 unitats del producte P_1, 15 unitats del producte P_2 i 7 unitats del producte P_3.

a) Escriviu en forma matricial la informació que relaciona el preu unitari i les empreses subministradores i també la informació de les quantitats de cada una de les dues comandes que vol fer el restaurant. *[1,25 punts]*
b) Calculeu a quina de les dues empreses ha d'encarregar el restaurant cada una de les comandes per tal que li surti més econòmica i a quin preu li sortirà cadascuna. *[1,25 punts]*

a) La matriu que relaciona el preu unitari de cada producte amb l'empresa subministradora és:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

I les matrius files de les dues comandes són:

$$B = (8 \quad 5 \quad 12) \text{ i } C = (10 \quad 15 \quad 7)$$

b) Per saber el preu total, en euros, de la primera comanda a cada una de les empreses calculem:

$$B \cdot A = (8 \quad 5 \quad 12)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (181 \quad 164).$$

Per tant la primera comanda és més econòmic fer-la a l'empresa E_2 i ens costarà 164 €.

Per saber el preu de la segona comanda a cada una de les empreses calculem:

$$C \cdot A = (10 \quad 15 \quad 7)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (198 \quad 219).$$

Per tant la segona comanda és més econòmic fer-la a l'empresa E_1 i ens costarà 198 €.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la matriu A: 0,75 p. Obtenció dels vectors de les comandes: 0,25 p. cadascun. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul dels dos productes de matrius: 0,25 p. cadascun. Obtenció dels preus finals de les dues comandes: 0,25 p. Cadascun.

2. Una empresa vol fabricar un producte nou. Encomana un estudi de mercat que determina que l'evolució de les vendes al llarg dels propers sis anys seguirà la funció $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en què $f(t)$ representa la quantitat de milers d'unitats venudes en funció del temps $t \in [0,6]$ expressat en anys.
   a) Quantes unitats vendrà el primer any? Tret de l'instant inicial ($t = 0$), es preveu que hi haurà algun altre any en el que no es produirà cap venda? *[1,25 punts]*
   b) En quin any es produirà el màxim nombre de vendes i quants productes s'hauran venut aquell any. *[1,25 punts]*

a) Calculem $f(1) = 1 - 12 + 36 = 25$. Per tant, el primer any es vendran 25.000 unitats.

   D'altra banda, observem que $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t = t \cdot (t-6)^2$. Per tant, els únics instants en que no es produeix cap venda és a l'instant inicial $t = 0$ i al sisè any, $t = 6$.

b) Si calculem la derivada $f'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3 \cdot (t-6) \cdot (t-2)$, observem que s'anul·la en els punts $t = 2$ i $t = 6$. Sabem, per l'apartat anterior, que en l'instant $t = 6$ és l'únic $t > 0$ pel qual no s'ha produït cap venda, per tant serà un mínim. Observem que passa amb l'instant $t = 2$. Veiem que $f'(t) > 0$ per $t < 2$ i, en canvi $f'(t) < 0$ per $t \in (2,6)$. Per tant, com que nosaltres tenim definida la funció en $t \in [0,6]$, el màxim de vendes es produeix el segon any. Calculem $f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$ i, per tant, el nombre de productes venuts aquest any és de 32.000 unitats.

Criteris de correcció: a) Obtenció de les vendes del primer any: 0,5 p. Obtenció de l'any en que no hi haurà vendes: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció de l'instant en què les vendes són màximes: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció de les vendes d'aquest any: 0,25 p.

3. Una fàbrica especialitzada en roba d'esport té problemes amb el subministrament de les fibres. Per satisfer una comanda de samarretes i malles només disposa de 90 km de fibra de polipropilè, 3,2 km de fibra de poliamida i 6,8 km de fibra d'elastà. Ha de fabricar com a mínim 80 samarretes i 50 malles.
Per fabricar cada peça de roba, tant si és una samarreta com si és una malla, calen en total 200 metres de fibra dels quals el 90% són de polipropilè en ambdós casos. En la composició de les samarretes hi ha, a més a més, un 6% de poliamida i un 4% d'elastà i en la composició de les malles hi ha un 2% de poliamida i un 8% d'elastà.
El benefici que el fabricant obté per cada samarreta que fabrica és de 5 € i per cada malla obté un benefici de 3 €.
   a) Determineu la funció objectiu, les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions que té el fabricant per satisfer la comanda amb les fibres disponibles. *[1,25 punts]*
   b) Calculeu quantes samarretes i quantes malles s'han de fabricar perquè el benefici sigui màxim. Quin és aquest benefici? *[1,25 punts]*

a) Les dades del problema són :

	Polipropilè		Poliamida		Elastà	
x nombre de samarretes que cal fabricar	90%	180 m	6%	12 m	4%	8 m
y nombre de malles que cal fabricar	90%	180 m	2%	4 m	8%	16 m
Total	$180x + 180y$		$12x + 4y$		$8x + 16y$	

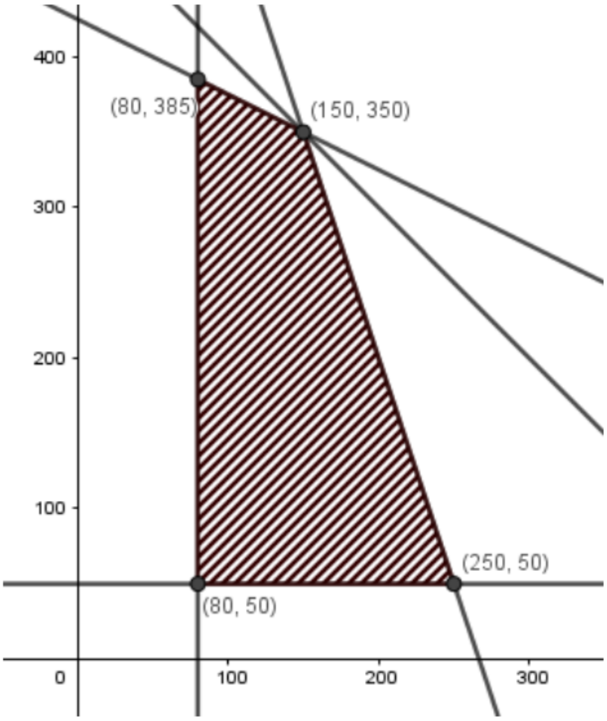
Per tant, les restriccions són:

$$\begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ 180x + 180y \leq 90.000 \\ 12x + 4y \leq 3.200 \\ 8x + 16y \leq 6.800 \end{cases}$$

Que simplificant ens queden:

$$\begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ x + y \leq 500 \\ 3x + y \leq 800 \\ x + 2y \leq 850 \end{cases}$$

La regió factible és la següent:



I la funció objectiu, que ens dona el benefici, ve donada per $F(x,y) = 5x + 3y$

b) El benefici màxim s'assoleix en un dels vèrtex de la regió factible. Calculem en quin:

A = (80, 50) $F(A) = 550$ €
B = (250, 50) $F(B) = 1.400$ €
C = (80, 385) $F(C) = 1.555$ €
D = (150, 350) $F(D) = 1.800$ €

Per tant el benefici màxim és de 1.800 € i s'obté fabricant 150 samarretes i 350 malles.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,5 p.

4. Considereu la funció $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
   a) Trobeu els valors dels paràmetres a, b i c sabent que té un màxim en el punt $(2,1)$ i un mínim en el punt $(0,-1)$. *[1,25 punts]*
   b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció pels valors dels paràmetres a, b i c trobats a l'apartat anterior. *[1,25 punts]*

a) Comencem calculant la derivada de la funció: $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$. Sabem que la funció passa pel punt $(0,-1)$. D'altra banda, $f(0) = c$. Per tant, deduïm que $c = -1$.
Sabem també que passa pel punt (2,1), i com que $f(2) = 16a + 4b - 1$ deduïm que $16a + 4b - 1 = 1$, és a dir, que $16a + 4b = 2$.
Com que en x=0 i en x=2 hi ha extrems relatius, en aquests punts s'ha d'anul·lar la derivada. D'una banda, $f'(0) = 0$, i per tant no ens aporta informació addicional, però d'altra banda tenim que $f'(2) = 32a + 4b$. I, per tant, sabem que $32a + 4b = 0$.
Resolem el sistema

$$\begin{cases} 16a + 4b = 2 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases}$$

I trobem que la solució és $a = -\frac{1}{8} = -0{,}125$, $b = 1$ i, ja sabíem que, $c = -1$.

b) Tenim la funció $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 - 1$. Calculem la seva derivada
$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$
Si l'igualem a zero tenim que $-\frac{1}{2}x^3 + 2x = 0$, que és equivalent a, $x \cdot (x^2 - 4) = 0$ que té per solucions $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.
Observem que $f'(x) > 0$ si $x < -2$, que $f'(x) < 0$ si $x \in (-2{,}0)$, $f'(x) > 0$ si $x \in (0{,}2)$ i $f'(x) < 0$ si $x > 2$. Per tant, la funció és creixent en els intervals $(-\infty, -2) \cup (0{,}2)$ i és decreixent en $(-2{,}0) \cup (2, +\infty)$.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Obtenció dels paràmetres a, b i c: 0,25 p. cadascun. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció dels punts crítics: 0,25 p. Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,25 p. Justificació de perquè la funció és creixent o decreixent: 0,25 p.

5. En una empresa de tecnologia hi ha un total de 100 empleats dividits en tres seccions: administració, recerca i publicitat. Tots els empleats de cada secció cobren el mateix sou mensual: 2.000 euros els d'administració, 2.400 euros els de recerca i 2.800 euros els de publicitat, i la despesa total mensual en salaris de l'empresa és de 228.000 euros.
   a) Plantegeu i estudieu el sistema d'equacions associat. Justifiqueu si es pot determinar el nombre d'empleats de cada secció. *[1,25 punts]*
   b) Una reestructuració recent ha obligat a acomiadar $\frac{1}{10}$ part dels empleats d'administració, $\frac{1}{6}$ part dels de recerca i $\frac{1}{5}$ part dels de publicitat. Aquest fet ha suposat un estalvi mensual en salaris de 33.200 euros. Determineu quants empleats tenia cada secció de l'empresa abans de la reestructuració. *[1,25 punts]*

a) Considerem les variables x, y, z com el número d'empleats de les seccions d'administració, recerca i publicitat, respectivament. Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2.000\,x + 2.400\,y + 2.800\,z = 228.000 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5\,x + 6\,y + 7\,z = 570 \end{cases}$$

Aplicarem el mètode de Gauss. Prenem les variables en l'ordre donat x, y, z. Tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \end{array}\right)$$

I, aplicant el mètode de Gauss s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \end{array}\right)$$

Per tant tenim que la matriu i la matriu ampliada tenen rang 2, mentre que el número d'incògnites és 3, així que es tracta d'un sistema compatible indeterminat i no poden determinar el nombre d'empleats de cada secció.

b) Plantegem el problema com abans però afegint l'equació addicional que ens dona l'enunciat:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5\,x + 6\,y + 7\,z = 570 \\ 2000 \cdot \dfrac{x}{10} + 2400 \cdot \dfrac{y}{6} + 2800 \cdot \dfrac{z}{5} = 33.200 \end{cases}$$

que reescrivim com a:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5\,x + 6\,y + 7\,z = 570 \\ 5\,x + 10\,y + 14\,z = 830 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \\ 5 & 10 & 14 & 830 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 5 & 9 & 330 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \end{array}\right)$$

Podem concloure que és un sistema compatible determinat ja que, tant el rang de la matriu, com el de la matriu ampliada, com el nombre d'incògnites, és 3. Resolent-lo s'obté la solució $x = 50$, $y = 30$ i $z = 20$. És a dir, inicialment hi havia 50 empleats d'administració, 30 de recerca i 20 de publicitat.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Justificació de que no podem determinar el nombre d'empleats de cada secció: 0,75 p. b) Plantejament: 0,25 p. Resolució i obtenció de la solució final: 1 p.

6. Un centre de formació organitza un curs subvencionat que té un cost fix de 9.000 € al qual cal sumar una quantitat que varia segons el nombre d'alumnes del curs i que ve donada per la funció $0{,}02x^3 - 24x$, en què x representa el nombre d'alumnes matriculats. El consell comarcal ha atorgat al centre una subvenció de 5.000 € per a l'organització del curs i l'ajuntament paga al centre 30 euros per cada alumne matriculat.
La despesa que ha d'assumir el centre és la diferència entre el cost total del curs i les dues subvencions rebudes.
Quants alumnes s'han de matricular al curs perquè la despesa sigui mínima per al centre i quina seria aquesta despesa? *[2,5 punts]*

El cost del curs, en funció del nombre d'alumnes matriculats x, serà: $C(x) = 9.000 + 0{,}02x^3 - 24x$.
La subvenció rebuda en funció del nombre d'alumnes serà: $S(x) = 5.000 + 30x$.
Per tant, la despesa en funció del nombre d'alumnes serà:

$$
\begin{aligned}
D(x) &= C(x) - S(x) \\
&= 9000 + 0{,}02x^3 - 24x - (5.000 + 30x) \\
&= 0{,}02x^3 - 54x + 4.000
\end{aligned}
$$

Calculem la derivada: $D'(x) = 0{,}06x^2 - 54$. Igualant la derivada a zero obtenim que s'anul·la per $x = -30$ (que no té sentit en el nostre context) i per $x = 30$. Observem que $f'(x) < 0$ per $x \in (0{,}30)$ i, en canvi, $f'(x) > 0$ per $x > 30$. Per tant, en $x = 30$ hi ha un mínim.
Així doncs la despesa mínima s'obté amb 30 alumnes matriculats. Calculem $D(30) = 0{,}02 \cdot 30^3 - 54 \cdot 30 + 4.000 = 2.920$ €.
Per tant, la despesa és mínima si hi ha 30 alumnes matriculats i és de 2.920 €.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la funció de costos: 0,25 p. Obtenció de la funció de subvencions: 0,25 p. Obtenció de la funció de despeses: 0,5 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'obté el mínim: 0,5 p. Justificació de que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Càlcul de la despesa mínima: 0,25 p..