SÈRIE 3

---

1. Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & si\ x\le -1\\ ax+b & si\ -1<x<2\\ x^2 & si\ x\ge 2\end{cases}$$

Trobeu el valor de a i b perquè la funció sigui contínua per a tots els nombres reals.
[2 punts]

La funció f és contínua en $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$ independentment del valor de a i b, ja que es tracta d'una funció polinòmica en cadascun dels intervals. Per tant, caldrà imposar que la funció sigui contínua en els punts d'abscissa $x=-1$ i $x=2$.
Per a $x=-1$ tenim que $f(-1)=2(-1)+3=1$. També,

$$\lim_{x\to -1-}(2x+3)=1$$

i, finalment,

$$\lim_{x\to -1+}(ax+b)=-a+b$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x=-1$ si $-a+b=1$.

D'altra banda, per a $x=2$ tenim que $f(2)=2^2=4$. D'una banda,

$$\lim_{x\to 2-}(ax+b)=2a+b$$

i, finalment també,

$$\lim_{x\to 2+}(x^2)=2^2=4.$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x=2$ si $2a+b=4$.

Així doncs, la funció serà contínua en tots els reals si i només si es verifiquen simultàniament les dues condicions trobades, és a dir, si a i b són la solució del sistema següent:

$$\begin{cases}-a+b=1\\ 2a+b=4\end{cases}$$

Resolem el sistema i trobem que cal que $a=1$ i $b=2$.

Criteris de correcció: Plantejament del problema: 0,5 p. Càlcul dels límits: 1 p. Resultat final: 0,5 p.

2. En acabar un curs de pintura, els alumnes reben com a obsequi un estoig amb retoladors i colors. Es regalen dos tipus d'estoigs: els vermells, que contenen 1 retolador i 2 colors i costen 9 €, i els verds, que porten 3 retoladors i 1 color i costen 15 €. L'escola disposa de 200 retoladors i 100 colors per a omplir els estoigs. Necessita preparar almenys 40 estoigs i que el nombre d'estoigs vermells no superi el nombre d'estoigs verds. Amb aquestes dades, l'escola vol calcular el preu que haurà de pagar per aquests obsequis.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions de l'escola.
[1,25 punts]

b) Calculeu quants estoigs de cada tipus cal preparar perquè la despesa sigui mínima i digueu quina és aquesta despesa mínima.
[0,75 punts]

a) Les dades del problema són:

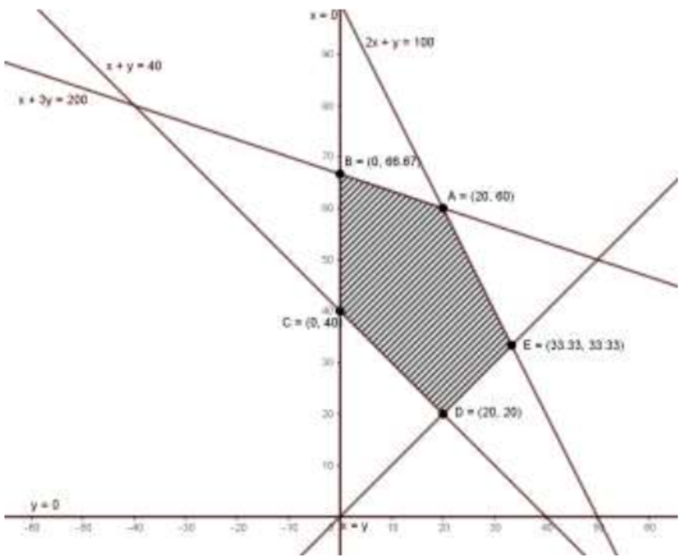
	Retoladors	Colors	Preu
x = nombre d'estoigs vermells	1	2	9
y = nombre d'estoigs verds	3	1	15
Total	$x+3y$	$2x+y$	$9x+15\,y$

Les restriccions venen donades per

$$\begin{cases} x+y \geq 40 \\ x \leq y \\ x+3y \leq 200 \\ 2x+y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La funció objectiu ve donada per l'expressió: Despesa (x, y) = $9x + 15y$.

I la regió factible és:



b) Tenim quatre vèrtexs i sabem que la despesa mínima s'assoleix en un dels vèrtexs de la regió factible. Calculem en quin:

A = (20, 60), despesa (A) = 1.080 €
B = (0,$\frac{200}{3}$), despesa (B) = 1.000 €
C = (0, 40), despesa (C) = 600 €
D = (20, 20), despesa (D) = 480 €
E = ($\frac{100}{3}$, $\frac{100}{3}$), despesa (E) = 800 €

Per tant, la despesa mínima possible és de 480 € i correspon a fer 20 estoigs vermells i 20 de verds.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el mínim: 0,25 p. Obtenció de la despesa mínima: 0,25 p.

---

3. Un inversor ha obtingut un benefici de 1.500 € després d'invertir un total de 40.000 € en tres empreses diferents. Aquests beneficis es desglossen de la manera següent: la quantitat invertida en l'empresa A li ha reportat un 2 % de beneficis, la quantitat invertida en l'empresa B, un 5 %, i la quantitat invertida en l'empresa C, un 7 %. Els diners invertits en l'empresa B han estat els mateixos que en les altres dues empreses juntes. Quina va ser la quantitat invertida en cada una de les tres empreses?
[2 punts]

Anomenem x la quantitat invertida en l'empresa A, y la quantitat invertida en l'empresa B i z la quantitat invertida en l'empresa C. A partir de les condicions de l'enunciat, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x + z = y \\ 0{,}02x + 0{,}05y + 0{,}07z = 1.500 \end{cases}$$

Que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 5y + 7z = 150.000 \end{cases}$$

El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 150.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & -2 & 0 & -40.000 \\ 0 & 3 & 5 & 70.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & 1 & 0 & 20.000 \\ 0 & 0 & 5 & 10.000 \end{array}\right).$$

A partir d'aquí, obtenim que $z = 2.000$ €, $y = 20.000$ € i $x = 18.000$ €.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,5 p.

4. La despesa mensual en tabac d'un fumador ve determinada pel seu salari mitjançant la funció $f(x) = \dfrac{400x}{x^2+4}$, en què x representa el salari en milers d'euros i $f(x)$ la despesa mensual en tabac en euros.

***a*)** Determineu el salari per al qual la despesa en tabac és màxima. A quant ascendeix aquesta despesa?
[1 punt]

***b*)** Per a quins salaris la despesa mensual és inferior a 60 €?
[1 punt]

a) Comencem fent la derivada de $f(x)$. Obtenim $f'(x) = \frac{-400x^2+1600}{(x^2+4)^2}$. Igualem a 0 la primera derivada per trobar els punts crítics i ens dona un salari de $x = 2$ (milers d'euros) i $x = -2$, que, pel context del problema, no té sentit. Per justificar que en $x = 2$ tenim un màxim, prenem un punt entre -2 i 2, per exemple $x = 0$ i veiem que la derivada és positiva, per tant, la funció és creixent. Mentre que per a punts més grans que 2, per exemple $x = 3$, la derivada és negativa, és a dir, la funció és decreixent. Per tant, en $x = 2$ hi ha un màxim. La despesa màxima serà de $f(2) = 100$ euros.

b) Hem de resoldre la inequació $f(x) < 60$, és a dir, $\frac{400x}{x^2+4} < 60$, que és equivalent a $400x < 60x^2 + 240$, o bé, dividint cada terme per 20,
$$0 < 3x^2 - 20x + 12$$
Si trobem les arrels de la paràbola $y = 3x^2 - 20x + 12$, obtenim $x = \frac{2}{3}$ i $x = 6$. Aquesta paràbola és negativa a l'interval $(\frac{2}{3}, 6)$ i és positiva als intervals que són la solució d'aquest apartat: $(0, \frac{2}{3}) \cup (6, +\infty)$. Hem tingut en compte que, pel context del problema, $x \geq 0$. Per tant, la despesa mensual en tabac és inferior a 60 € si el salari és inferior a 666,67 € o si és superior a 6.000 €.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció del punt on s'obté el màxim: 0,25 p. Justificació del fet que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul de la despesa màxima: 0,25 p. b) Plantejament de la inequació: 0,25 p. Resolució de l'equació de segon grau: 0,25 p. Obtenció de l'interval que és solució: 0,5 p.

5. Resoleu les preguntes següents:

a) Trobeu les matrius ***A*** i ***B*** que compleixen que $A-2B=\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}$ i $2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de a, b, c i d perquè es verifiqui que $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$.

[1 punt]

a) Observem que $2(A-2B)-(2A+3B)=-7B$. Per tant,

$$-7B=2\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}.$$

D'aquí obtenim que $B=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. I, d'altra banda, $A=2B+\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

b) Calculem el producte de matrius $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix}$. Per tant, tenim que $\begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$. D'aquí obtenim que $b=4$, $c-8=-5$, és a dir, $c=3$, $d=2$ i $ac-4=-7$, per tant, $3a=-3$, és a dir, $a=-1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la matriu A: 0,5 p. Càlcul de la matriu B: 0,5 p. b) Càlcul del producte de matrius: 0,5 p. Obtenció del valor dels quatre paràmetres: 0,5 p.

---

6. Sabem que la funció $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ passa pel punt $(2,-5)$ i que les rectes $x=1$ i $y=2$ en són les asímptotes vertical i horitzontal, respectivament. Calculeu *a*, *b* i *c*.

[2 punts]

Com que es tracta d'una funció racional, l'asímptota vertical la tindrà en el punt que anul·la el denominador; és a dir, cal que $cx+1=0$ per a $x=1$, per tant, $c=-1$.

Observem que el $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c}$ i també $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c}$. Per tant, tenim que $\frac{a}{c}=2$ (l'asímptota horitzontal). Per tant, $a=2c=-2$.

Finalment, sabem que passa pel punt $(2,-5)$, per tant, $f(2)=-5$, és a dir, $\frac{2a+b}{2c+1}=-5$, i deduïm que $b=9$.

Criteris de correcció: Plantejament del punt on hi ha l'asímptota vertical i obtenció del paràmetre c: 0,5 p. Plantejament del punt on hi ha l'asímptota horitzontal i obtenció del paràmetre a: 0,75 p. Plantejament i obtenció del paràmetre b: 0,75 p.