SÈRIE 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més trascendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1.

a)

Estudieu per a quins valors de λ el sistema és incompatible.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(5\lambda+5) = 5\lambda(\lambda+1)$$

<u>CAS I: Si $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$</u>

$Rang\ M = Rang\ \overline{M} = núm.\, incòg = 3$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, en aquest cas el sistema és $compatible\ determinat$.

<u>CAS II: Si $\lambda = 0$</u>

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Rang\ M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \ \Longrightarrow \quad Rang\ \overline{M} = 3$$

$Rang\ M \neq Rang\ \overline{M}$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, el sistema és $incompatible$.

CAS III: $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Rang\ M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 120 \neq 0 \ \Longrightarrow \quad Rang\ \overline{M} = 3$$

$Rang\ M = 2 \qquad Rang\ \overline{M} = 3$

$Rang\ M \neq Rang\ \overline{M}$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, el sistema és $incompatible$.

$\boxed{\text{El sistema és incompatible per a dos valors del paràmetre } \lambda\text{: } \lambda = 0 \text{ i } \lambda = -1.}$

b) Resoleu el sistema per a $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y + z &= 10 \\ 2x - y + 5z &= 30 \end{cases}$$

En aquest cas el sistema és compatible determinat, té una única solució i el sistema es pot resoldre per qualsevol mètode conegut, per exemple, pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array}\right)$$

De la tercera equació, tenim $10z = 60$, per tant, $z = 6$.
De la segona equació, tenim y+$z = 10$, per tant, $y = 4$.
De la primera equació, tenim $x + y - z = 0$, per tant, $x = 2$.

$\boxed{\text{Solució: } (x = 2 \ , \ \ y = 4 \ , \ \ z = 6).}$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per al determinant de la matriu de coeficients i per als valors crítics.
0,25 punts per a la discussió del cas $\lambda = -1$.
0,25 punts per a la discussió del cas $\lambda = 0$.
0,25 punts per a la resposta a la pregunta.

b)
0,25 punts per al sistema particular (i la indicació de SCD, si és el cas, que no cal).
0,25 punts per al valor de la x.
0,25 punts per al valor de la y.
0,25 punts per al valor de la z.

2.

a)
Si el pla ha de ser perpendicular als dos plans π_1 i π_2, aleshores el seu vector normal, $n = (A, B, C)$ haurà de ser perpendicular als respectius vectors normals $n_1 = (5, -1, -7)$ i $n_2 = (2, 3, 1)$.

Així doncs $n = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & 5 & 2 \\ j & -1 & 3 \\ k & -7 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19,\ 17)$.

El pla tindrà la forma $20x - 19y + 17z = D$, però si ha de passar per l'origen de coordenades (0,0,0), aleshores D = 0 i el pla buscat serà $\boxed{20x - 19y + 17z = 0}$.

b) L'angle entre els dos plans serà l'angle que formin els respectius vectors normals. Així doncs:

$$\boxed{\alpha} = \alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(n_1, n_2) = \alpha\big((5, -1, -7), (2,3,1)\big) = arccos\frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} =$$
$$= arccos\frac{10 - 3 - 7}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = arc\cos 0 = \boxed{90^\circ = \frac{\pi}{2} rad}.$$

Els dos plans són perpendiculars.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament de perpendicularitat entre vectors normals.
0,25 punts pel producte vectorial.
0,25 punts per la forma inicial del pla.
0,25 punts per l'equació final del pla.

b)
0,25 punts per l'angle a partir de l'angle entre els vectors normals.
0,25 punts per la formulació de l'angle.
0,25 punts pel producte escalar.
0,25 punts per la perpendicularitat (o l'angle de 90º, sense indicar perpendicularitat).

3.

a)

La resposta depèn del signe de *k*.

- Si $k < 0$, aleshores $x^2 - k > 0$ per a qualsevol valor de *x* i, per tant, $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}}$ i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$ és contínua perquè no s'anul·la el denominador i no té cap asímptota vertical.
  Com que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-k} = 0$, la funció té una asímptota horitzontal en l'eix de les *x*, y=0.
- Si $k > 0$ aleshores $x^2 - k$ s'anul·la per als valors $\pm\sqrt{k}$ i, per tant, Dom(*f*) = R-$\{\pm\sqrt{k}\}$ i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$ tindrà dues asímptotes verticals, en $x = +\sqrt{k}$ i en $x = -\sqrt{k}$.
  Com que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-k} = 0$, la funció té una asímptota horitzontal en l'eix de les *x*, y=0.

b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-k)^2} = 0$ si $x = 0$, amb independència del valor de *k*.

$$f''(x) = \frac{(-2)(x^2-k)^2 - (-2x)2(x^2-k)2x}{(x^2-k)^4} = \frac{(-2)(x^2-k) + 8x^2}{(x^2-k)^3} = \frac{6x^2+2k}{(x^2-k)^3}$$

Com que $f''(0) = \frac{-2}{k^2} < 0$,

f , per tant, té un màxim relatiu en el punt $\left(0, \frac{-1}{k}\right)$ i no té mínims relatius.

Observació: En lloc de fer servir el signe de la derivada segona també es pot veure el creixement o decreixement de la funció *f* a l'entorn de $x = 0$.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel domini i no AV quan $k < 0$
0,25 punts pel domini i AV quan $k > 0$
0,25 punts per la AH quan $k < 0$
0,25 punts per la AH quan $k > 0$

b)
0,25 punts per la derivada primera.
0,25 punts pel punt singular.
0,25 punts per la derivada segona o el raonament equivalent sobre el creixement o decreixement.
0,25 punts per la classificació del punt i la resposta final.

4.

a)

Perquè tingui solució única caldrà que el sistema sigui compatible i determinat; és a dir, que rangM=rangM'=3

amb $(M|M') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2a$$

Per tal que rangM=3 cal que Det M $\neq 0 \quad \Leftrightarrow a \neq 0$

Això vol dir que el sistema és compatible i determinat sempre que $a \neq 0$

b) Per Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{a^3 - 2a}{-2a} = \frac{2 - a^2}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - a^2 - 1}{-2a} = \frac{a}{2} \quad \text{i}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - 1 - a^2}{-2a} = \frac{a}{2}$$

Per tant, la solució del sistema (en funció del paràmetre *a*) és: $\boxed{\left(\frac{2-a^2}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per la condició de Rouché-Frobënius.
0,25 punts pel determinant de l'associada.
0,25 punts pel valor singular.
0,25 punts pel raonament final.

b)
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Cramer o mètode equivalent.
0,25 punts pel càlcul de la x.
0,25 punts pel càlcul de la y.
0,25 punts pel càlcul de la z.

5.

a)

Per a comprovar que una matriu $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$ és invertible és suficient comprovar que el seu determinant és sempre diferent de 0.

Efectivament, $|M| = x^2 - (-1)(y^2+1) = x^2 + y^2 + 1$, que és sempre diferent de 0, ja que $x^2 + y^2 \geq 0$ en ser suma de dos quadrats, independentment del valor que tinguin les variables x i y.

a) Per a $x = 1$ i $y = -1$, tenim $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Tindrem $M^{-1} = \frac{1}{|M|}(AdjM)^t = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

Pautes de correcció:

a)
0,5 punts pel plantejament a partir del determinant no nul (o del rang 2).
0,5 punts per provar que el determinant és sempre diferent de 0.

b)
0,25 punts per l'expressió de *M*.
0,25 punts per la formulació del càlcul de la matriu inversa.
0,5 punts pel càlcul final.

.

6.

a)

Pel teorema de Pitàgores sabem que $a^2 = x^2 + h^2$. Com que el volum del con val 120 cm^3, per la fórmula del volum tenim

$$120 = \frac{\pi \cdot x^2 \cdot h}{3}$$

i aïllant, obtenim $x^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h}$. Substituint x^2 a l'expressió inicial, s'obté la fórmula buscada.

b) La longitud de l'aresta és una funció positiva i tenim la longitud al quadrat expressada com a funció de h, per tant és suficient amb trobar els mínims de la funció

$$f(h) = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$$

quan $h \in (0, \infty)$. Tenim

$$f'(h) = 2h - \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$$

per tant, en igualar $F'(h) = 0$, s'obté $2h = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$, $h^3 = \frac{180}{\pi}$ i $\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \simeq 3{,}86 \text{ cm}}$.

Es comprova que és un mínim, ja que $f'(x) < 0$ quan $x \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\right)$ i $f'(x) > 0$ quan $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}, \infty\right)$.

Alternativament, es pot treballar amb la funció

$$a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}$$

i s'obté com a derivada

$$a'(h) = \frac{h - \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}}{\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}}$$

El desenvolupament del problema és el mateix a partir d'aquí.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per l'aplicació del teorema de Pitàgores.
0,25 punts per la igualtat derivada del volum.
0,25 punts per aïllar la x.
0,25 punts per la substitució final.

b)
0,25 punts per l'argumentació de la funció a minimitzar.
0,25 punts per la derivada de la funció.
0,25 punts pel punt singular (en forma radical o amb l'expressió decimal).
0,25 punts per la classificació del punt singular (com a la proposta de resolució o a partir del signe de la derivada segona).

SÈRIE 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

6. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
7. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
8. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
9. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
10. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més trascendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1.

a)

Un vector director de *r* es pot obtenir amb el producte vectorial dels vectors normals dels dos plans: $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \equiv (2,4,2)$

Un vector director de *s* el tenim als denominadors de l'equació contínua: $\vec{v} = (1,2,1)$

Un punt de *s* és $P = (-1,2,1)$, que podem comprovar que no pertany a *r* ja que no satisfà la primera equació.

Com que els dos vectors directors són proporcionals i $P \notin r$, deduïm que les dues rectes són paral·leles.

b) Un punt de *r* és $Q = \left(\frac{1}{2},0,0\right)$.

El pla buscat queda determinat pel punt $P = (-1,2,1)$ i pels vectors $\begin{cases} \overrightarrow{QP} = \left(-\frac{3}{2},2,1\right) \\ \vec{v} = (1,2,1) \end{cases}$ i

la seva equació vectorial és:

$$\pi : (x,y,z) = (-1,2,1) + \lambda \cdot (1,2,1) + \mu \cdot \left(-\frac{3}{2},2,1\right)$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel vector director de la recta *r*.
0,25 punts pel vector director de la recta *s*.
0,25 punts per un punt d'una recta.
0,25 punts per la proporcionalitat i raonament final.

b)
0,25 punts per un punt de l'altra recta.
0,25 punts per un primer vector director.
0,25 punts per un segon vector director.
0,25 punts per l'equació vectorial.

2.

a)

Fem Gauss prenent les variables en l'ordre donat x, y, z, i obtenim les matrius

$$M|MA = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Substituïm la segona fila (F2) per F2-2·F1 i la tercera fila F3 per F3-F1, on F1 denota la primera fila. Tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Ara és n'hi ha prou d'intercanviar les columnes 2 o 3 per tenir la matriu diagonalitzada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k^2-4 \end{array}\right)$$

i podem passar a la discussió:

- Per $k \neq 2$ i $k \neq -2$ tenim $rang\ M = rang\ MA = núm. incog. = 3$ i per tant és un sistema compatible determinat.
- Per $k = 2$ tenim $rang\ M = 2$ i $rang\ MA = núm. incog. = 3$ i per tant es tracta d'un sistema incompatible.
- Per $k = -2$ tenim $rang\ M = rang\ MA = 2$ i per tant és un sistema compatible indeterminat amb 3-2 = 1 grau de llibertat.

Nota: Anàlogament, es pot discutir el rang *M* a partir del determinant de la matriu. $|M| = 4 - k^2$ o del menor una vegada aplicat el primer pas de Gauss, amb la igualtat $\begin{vmatrix} 2 & k-2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, que condueix igualment als valors $k = 2$ i $k = -2$, per a organitzar la discussió. En qualsevol cas, la resolució correcta serà puntuada amb 1 punt.

b)

Ja hem vist que per $k = -2$ tenim un sistema compatible indeterminat i fent servir els càlculs de l'apartat anterior sabem que el sistema és equivalent a:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Triant z com a paràmetre, s'obté $y = 2z + \frac{1}{2}$ i $x = y - z = z + \frac{1}{2}$ d'on la solució és

$$\boxed{(x, y, z) = (z + \frac{1}{2}, 2z + \frac{1}{2}, z)}$$

O alternativament

$$\boxed{(x, y, z) = \left(x, 2x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right)}$$

o

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{2y + 1}{4}, y, \frac{2y - 1}{4}\right)}$$

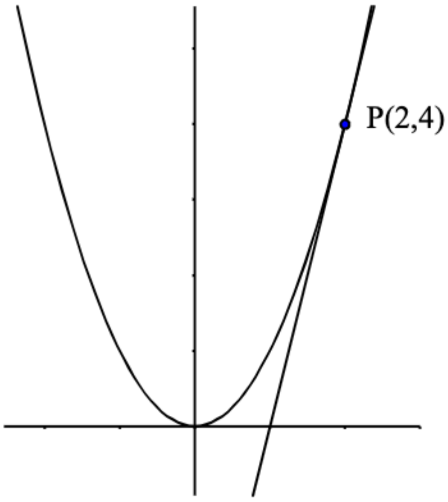
Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament matricial.
0,25 punts per arribar als valors crítics.
0,25 punts per a un cas de la discussió.
0,25 punts pels altres dos casos de la discussió.

b)
0,25 punts per la versió reduïda del sistema.
0,25 punts per l'expressió d'una primera incògnita.
0,25 punts per l'expressió de la segona incògnita
0,25 punts per la solució general del sistema com a SCI.

3.

a)



Trobem el punt de tangència: P(2,4).

El pendent de la tangent és la derivada, per tant:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ i $f'(2) = 4$

La recta tangent és doncs: $y - 4 = 4(x - 2)$, o sigui $y = 4x - 4$.

Els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades els trobem quan *x* = 0 que obtenim *y* = -4 i quan *y* = 0 que obtenim *x* = 1. Així doncs els punts intersecció són $\boxed{(0,-4)}$ i $\boxed{(1,0)}$.

b) L’àrea de la regió es pot obtenir:

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(x^2 - (4x-4)\right)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \boxed{\frac{2}{3}u^2}.$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel punt de tangència.
0,25 punts per la derivada en el punt.
0,25 punts per la recta tangent.
0,25 punts pels punts intersecció.

b)
0,25 punts pel plantejament de les dues integrals.
0,25 punts per les dues primitives.
0,25 punts per l’aplicació de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final.

4.

a)

$$A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}= -Id$$

$A^6=A^3\cdot A^3=(-Id)(-Id)=Id.$

b) Com que $Id = A^6 = A\cdot A^5$ aleshores la matriu inversa de A^5 és A.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per A^2.
0,25 punts per A^3.
0,5 punts per A^6.

b)
0,5 punts per la factorització.
0,5 punts per l'obtenció de la inversa.

5.

a)

Fem el determinant de la matriu dels coeficients: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2 \cdot (a+2)$

✓ $\boxed{\text{Si } a \neq 1 \text{ i } a \neq -2}$ per Rouché-Frobenius, rang(A) = rang(A/b) = nombre d'incògnites = 3

Sistema compatible determinat, una sola solució, un punt.
Els tres plans són secants i es tallen en un punt.

✓ $\boxed{\text{Si } a = 1}$ $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rang(A) = rang(A/b) = 1 < 3 = nombre d'incògnites, llavors és un sistema compatible indeterminat amb dues variables lliures. Els tres plans coincideixen.

✓ $\boxed{\text{Si } a = -2}$

$$\rightarrow (A|b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Llavors és un sistema incompatible. Es tracta per tant de tres plans que no tenen cap punt comú a tots tres. Com que tots els menors d'*A* d'ordre 2 són diferents de 0, cada dos plans es tallen en una recta que queda paral·lela (no continguda) al tercer pla.

b) El sistema és compatible indeterminat quan $a = 1 \rightarrow$ $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

ens queda el pla: $x + y + z = 1$, que en forma paramètrica serà: $\boxed{\pi: \begin{cases} x = 1 - t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}}$.

Un punt del pla és $\boxed{P_\pi = (1,0,0)}$ i dos vectors directors: $\boxed{v_1 = (-1,1,0)}$ i $\boxed{v_2 = (-1,0,1)}$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel determinant de la matriu associada i els valors singulars.
0,25 punts pel cas general.
0,25 punts pel cas *a* = 1.
0,25 punts pel cas *a* = -2.

b)
0,5 punts per l'expressió paramètrica del pla solució.
0,25 punts pel punt.
0,25 punts pels dos vectors directors.

6.

a)

La base del rectangle és 6-*x*.

Per a calcular l'alçada del rectangle calculem primer l'equació de la recta que fa de sostre inclinat. Si pensem l'origen (0,0) en el punt A, la recta és la que passa pels punts (0, 1) i (6, 3). Té per tant pendent (3-1)/(6-0) = 2/6 = 1/3 i serà de la forma *y* = (1/3) *x* + *n* i si ha de passar pel punt (0, 1), *n* ha de valer 1. Així doncs l'alçada és (1/3) *x* +1

Per tant l'àrea del rectangle és $A(x) = (6-x)\cdot\left(\frac{1}{3}x+1\right) = \boxed{-\frac{1}{3}x^2+x+6}$.

Nota: Els càlculs per a l'equació del sostre per a determinar l'alçada de l'armari també es poden resoldre per semblança de triangles. Es puntuarà de forma anàloga.

b) Per a maximitzar la funció $A(x)$ mirem en quin punt s'anul·la la derivada.

$$A'(x) = -\frac{2}{3}x+1$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

I com que *A''*(*x*) = -2/3 < 0 en $\boxed{x = 3/2 \text{ hi ha un màxim relatiu}}$

Per tant les dimensions del rectangle seran $6-\frac{3}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$ de base i $\frac{1}{3}\frac{3}{2}+1 = \boxed{\frac{3}{2}}$ d'alçada.

L'àrea màxima serà $A\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2} = \boxed{\frac{27}{4}\,u^2}$.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per la base del rectangle.
0,25 punts per l'equació del sostre.
0,25 punts per l'alçada del rectangle.
0,25 punts per l'àrea del rectangle.

b)
0,25 punts per la derivada i el punt singular.
0,25 punts per la comprovació de màxim.
0,25 punts per les dimensions del rectangle.
0,25 punts pel càlcul de l'àrea màxima.