

# Matemàtiques

## Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una  $600 \text{ cm}^2$  de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.

[2 punts]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real  $k$ :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre  $k$ .

[1 punt]

- b) Resoleu el sistema per al cas  $k = -1$ .

[1 punt]

3. Un dron es troba en el punt  $P = (2, -3, 1)$  i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació  $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$ .

- a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?

[1 punt]

- b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades  $(x_0, y_0, z_0)$  al pla

d'equació  $Ax + By + Cz + D = 0$  amb l'expressió  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

4. Considereu la funció  $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$ .
- a) Calculeu-ne el domini i estudeu-ne la continuïtat. Té cap asymptota vertical?  
[1 punt]
- b) Observeu que  $f(-2) = -\frac{2}{3}$ ,  $f(0) = 4$  i  $f(2) = -10$ . Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval  $(-2, 0)$  conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval  $(0, 2)$ ? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.  
[1 punt]
5. Sigui la matriu  $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ , en què  $a$  és un paràmetre real.
- a) Calculeu per a quins valors del paràmetre  $a$  se satisfà la igualtat  $M^2 - M - 2I = \mathbf{0}$ , en què  $I$  és la matriu identitat i  $\mathbf{0}$  és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.  
[1 punt]
- b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la matriu inversa de la matriu  $M$  i, a continuació, calculeu la inversa de  $M$  per al cas  $a = \sqrt{2}$ .  
[1 punt]
6. Considereu les funcions  $f(x) = x^2$  i  $g(x) = \frac{1}{x}$ , i la recta  $x = e$ .
- a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de  $y = f(x)$  amb  $y = g(x)$ .  
[1 punt]
- b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.  
[1 punt]





# Matemàtiques

## Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de  $2 \text{ m}^2$ . Sabem que el preu de la fusta és de  $7,5 \text{ €/m}$  per als costats horitzontals i de  $12,5 \text{ €/m}$  per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?

[2 punts]

2. Siguin la recta  $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$  i el pla  $\pi: x - z = 3$ .

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla  $\pi$  i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta  $r$ .

[1 punt]

b) Trobeu els punts de  $r$  que estan a una distància de  $\sqrt{8}$  unitats del pla  $\pi$ .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades  $(x_0, y_0, z_0)$  al

pla d'equació  $Ax + By + Cz + D = 0$  amb l'expressió  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real  $a$ :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre  $a$ .

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas  $a = 2$ .

[1 punt]

4. Considereu la funció  $f(x)$ , que depèn dels paràmetres reals  $n$  i  $m$  i és definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de  $n$  i  $m$  perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.

[1 punt]

b) Per al cas  $n = -4$  i  $m = -6$ , calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de  $f(x)$ , l'eix de les abscisses i les rectes  $x = 0$  i  $x = 4$ .

[1 punt]

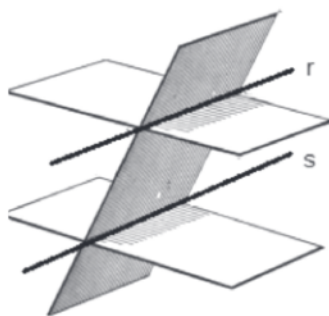
5. Considereu els plans  $\pi_1: 2x + ay + z = 5$ ,  $\pi_2: x + ay + z = 1$  i  $\pi_3: 2x + (a + 1)y + (a + 1)z = 0$ , en què  $a$  és un paràmetre real.

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre  $a$  els tres plans es tallen en un punt.

[1 punt]

b) Comproveu que per al cas  $a = 1$  la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:

[1 punt]



6. Sabem que una funció  $f(x)$  és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a segona derivada  $f''(x) = 6x$  i que la recta tangent en el punt d'abscissa  $x = 1$  és horitzontal.

a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció  $f$  i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció  $f$  té un mínim relatiu en  $x = 1$ .

[1 punt]

b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa  $x = 1$  és  $y = 5$ , calculeu l'expressió de la funció  $f$ .

[1 punt]



Institut  
d'Estudis  
Catalans