Sèrie 2

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.

2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3. En alguns casos, la solució final pot admetre expressions equivalents. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

   - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.

   - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.

   - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.

   - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1.

[1,25 punts]

a)

[1,25 punts]

L'equació de la recta tangent en el punt de la paràbola $(a, f(a)) = (a, 4 - a^2)$ és:

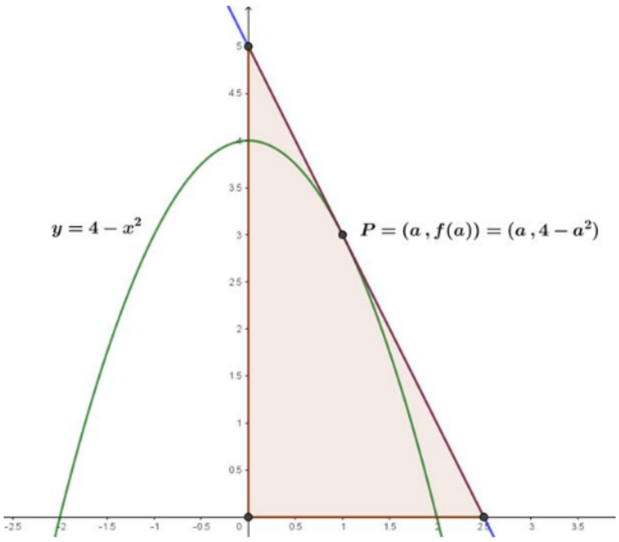
$$y - f(a) = f^{'}(a) \cdot (x - a)$$

Calculem la derivada i l'avaluem en $x = a$:

$f(x) = 4 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(a) = -2a.$

La recta tangent a la paràbola és:

$$y - (4 - a^2) = -2a \cdot (x - a) \rightarrow\ y = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2\ \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$$



Calculem el punt de tall amb l'eix OX $(y = 0)$:

$0 = -2ax + a^2 + 4;\ x = \frac{a^2+4}{2a}$

Tenim el punt $\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$.

El punt de tall amb l'eix OY $(x = 0)$ és:

$$y = a^2 + 4$$

I tenim el punt $(0, a^2 + 4)$.

b)

[1,25 punts]

El triangle té vèrtexs en els punts $(0,0)$, $\left(\frac{a^2+4}{2a},0\right)$ i $(0,a^2+4)$, per tant, és un triangle rectangle de base $\frac{a^2+4}{2a}$ i altura a^2+4. La seva àrea és:

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+4}{2a}\right)(a^2+4)=\frac{(a^2+4)^2}{4a}$$

Derivem i igualem a zero:

$$S'(a)=\frac{(a^2+4)\cdot(3a^2-4)}{4a^2},\quad S'(a)=0\ \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ a=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Rebutgem la solució $a=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ja que a ha de ser positiu, per tant, el valor buscat és $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$, que serà un mínim ja que:

$$S'(a)=\begin{cases} <0 \text{ si } \ 0<a<\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és decreixent per a } a<\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \geq 0 \text{ si } \ a\geq\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és creixent per a } a>\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament, on s'indiqui que la recta tangent té pendent $f'(a)$.

0,5 punts per l'expressió de la recta tangent.

0,25 punts pel punt de tall amb l'eix d'abscisses.

0,25 punts pel punt de tall amb l'eix d'ordenades.

Tot i que cal donar les dues coordenades dels punts de tall, en cas de no donar la coordenada 0, no es penalitza.

b) 0,25 punts per la funció àrea.

0,5 punts per la derivada primera.

0,25 punts pel valor de a on s'assoleix el mínim.

0,25 punts per comprovar que és mínim relatiu.

Es considera correcta si es dona la solució sense racionalitzar.

2

a)

[1,5 punts]

Escrivim el sistema en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El determinant de la matriu de coeficients, A, és:

$$\det A = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -p^3 + 3p^2 - 2p = -p(p-1)(p-2)$$

Els valors de p que fan que el determinant sigui zero són: $p = 0, p = 1$ i $p = 2$.

Aleshores:

- Si $p \neq 0,1,2 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinat
- Si $p = 0$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $p = 1$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $p = 2$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < \text{núm. incògnites} = 3 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat

b)

[1 punt]

Per a $p = 2$ el sistema és compatible indeterminat, dues de les equacions són coincidents. Cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 - z \\ 2x + 2y = 1 - 4z \end{cases}$$

Prenem $z = t$ com a paràmetre i tenim $x = \frac{3}{2} + t,\quad y = -3t - 1,\quad z = t$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema.

0,25 punts per arribar als valors crítics per a la discussió.

1 punt per la discussió dels quatre casos (0,25 punts per cada cas).

b) Si han fet bé el cas $p = 2$ en l'apartat a), 0,5 punts pel càlcul de cada variable en funció d'un paràmetre lliure.

Si no fan servir l'apartat a), 0,25 punts per observar que és un sistema compatible indeterminat i 0,75 punts per la solució.

3.

a)

[1,25 punts]

L'equació de la recta perpendicular al pla $x = y$ que passa pel punt $(-1, 3, 1)$ té com a vector director $(1, -1, 0)$, per tant l'equació és:

$$(x, y, z) = (-1, 3, 1) + t(1, -1, 0) = (-1 + t, 3 - t, 1)$$

Fem la intersecció d'aquesta recta amb el pla i trobarem M, el punt mig del segment PP':

$$x = y \rightarrow -1 + t = 3 - t \rightarrow t = 2 \; ; \quad M = (1, 1, 1)$$

Finalment, $M = \frac{P+P'}{2} \rightarrow P' = 2M - P = (2 + 1, 2 - 3, 2 - 1) = (3, -1, 1)$

b)

[1,25 punts]

El vector normal al pla que ens demanen és perpendicular a la recta r i també ha de ser perpendicular al pla π. El calculem fent el producte vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_1 \rightarrow (1, 1, -5)$$

L'equació del pla és $x + y - 5z + D = 0$ i si imposem que ha de passar pel punt $(1, 0, 2)$ determinem el terme independent D:

$$1 - 10 + D = 0 \rightarrow D = 9$$

Finalment, l'equació del pla demanat és $x + y - 5z + 9 = 0$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel plantejament, on s'expliqui com es calcula el punt simètric.

   0,25 punts per la recta perpendicular.

   0,25 punts pel punt mig.

   0,25 punts per la solució.

b) 0,5 punts pel plantejament.

   0,25 punts pel vector normal al pla.

   0,5 punts per l'equació cartesiana del pla.

   En cas de resoldre qualssevol dels apartats per estratègies diferents a les donades en aquestes pautes també es considerarà correcte.

4.

a)

[1 punt]

La recta tangent és horitzontal en els punts on la derivada s'anul·la, aleshores:

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2}\ \rightarrow\ \frac{1-\ln x}{x^2}=0\rightarrow\ 1-\ln x=0\rightarrow \ln x=1\rightarrow x=e$

Així, l'únic punt amb recta tangent horitzontal és $(x,y)=\left(e,\frac{1}{e}\right)$

Per determinar si és un extrem relatiu podem fer servir el criteri de la segona derivada:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$f''(e)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}\ =\frac{-1}{e^3}<0\ \ \rightarrow$ indica que correspon a un màxim relatiu.

b)

[0,5 punts]

En relació amb les asímptotes, com que la funció només està definida per $x>0$, cal mirar l'asímptota només per a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty}{\infty}\text{ ind.}$$

Aplicant la regla de l'Hôpital, resoldrem aquesta indeterminació:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Per tant, l'eix d'abscisses, $y=0$, és una asímptota horitzontal d'aquesta funció.

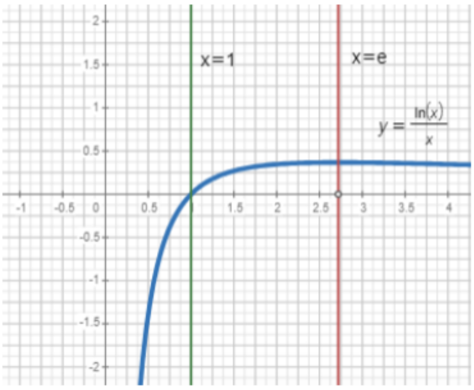
c)

[1 punt]

L'àrea demanada correspon a la integral definida:

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} lnx\, dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

La representació gràfica és:



Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament, on es digui que el pendent de la recta horitzontal ha de ser zero.

0,25 punts per la derivada.

0,25 punts pel punt on la recta tangent és horitzontal.

0,25 punts per justificar que és un màxim relatiu.

b) 0,25 punts pel plantejament, on s'expliqui que només cal estudiar el límit quan $x \to +\infty$.

0,25 punts per l'asímptota horitzontal.

c) 0,25 punts per la integral definida que correspon a l'àrea demanada.

0,25 punts per la primitiva.

0,25 punts per la regla de Barrow i resultat de l'àrea.

0,25 punts per la gràfica.

En cas que responguin que l'àrea és infinita –perquè no s'esmenta l'eix d'abscisses en l'enunciat–, es puntuarà 0,5 punts per la gràfica i 0,5 per dir raonadament que és infinita.

5.

a)

[1,25 punts]

Calculem A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinant de la matriu A^2 és $|A^2| = 1 \neq 0$, per tant, és una matriu invertible.

Multipliquem l'equació matricial per $(A^2)^{-1}$ per l'esquerra, així ens queda:

$A^2 \cdot X = A - 3 \cdot I \rightarrow X = (A^2)^{-1}(A - 3 \cdot I)$

Calculem la matriu inversa de A^2:

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Finalment:

$X = A(A - 3 \cdot I)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

[1,25 punts]

Sumem I a les dues bandes de la igualtat que ens donen:

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0 \to M^3 - 3M^2 + 3M = I$$

Traiem M factor comú per l'esquerra:

$$M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I \qquad (*)$$

Fem el determinant a banda i banda de la igualtat i tenim:

$$det\big(M \cdot (M^2 - 3M + 3I)\big) = \det I = 1 \to \det M \cdot det(M^2 - 3M + 3I) = 1$$

D'on podem afirmar que $\det M \neq 0$, ja que si s'anul·lés la igualtat anterior no se satisfaria. Així doncs, M és invertible i podem expressar la inversa de la forma següent:

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$$

De l'expressió (*) es pot deduir directament que la matriu M és invertible i que l'expressió de la inversa, sense haver de justificar que el determinant és diferent de 0.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per calcular A^2.

   0,25 punts per aïllar X.

   0,5 punts per la inversa de A^2.

   0,25 punts pel resultat final de X.

b) 0,5 punts per operar correctament amb la igualtat donada.

   0,5 punts per justificar que M és invertible.

   0,25 punts per trobar l'expressió la matriu inversa demanada.

6.

a)

[1,25 punts]

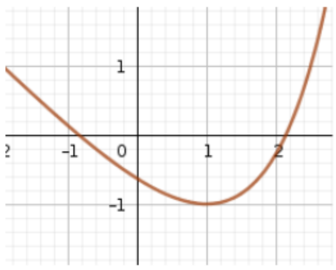
La funció és contínua per ser la suma de dues funcions continues, l'exponencial i una polinòmica de primer grau.

Per analitzar-ne la monotonia estudiarem el signe de la derivada:

$f'(x) = e^{x-1} - 1 = 0$ per tant $e^{x-1} = 1$ d'on $x - 1 = 0$ i, així, $x = 1$ és un punt crític.

Fem la taula de comportament

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	decreix	-1	creix



La funció té un mínim relatiu (i absolut) en el punt $(1, -1)$,
és monòtona decreixent en l'interval $(-\infty, 1)$ i monòtona creixent en l'interval $(1, +\infty)$.

b)

[1,25 punts]

Per demostrar si la funció té o no arrels aplicarem el teorema de Bolzano. En aquest cas la funció és contínua en tots els reals, per tant, ho és en qualsevol interval tancat, concretament en l'interval $[-1,3]$.

Els tots dos extrems de l'interval la funció és positiva:

$f(-1) = e^{-2} > 0$ i $f(3) = e^2 - 4 > 0$

Per altra banda, sabem que $f(1) < 0$ i que en $x = 1$ la funció té un mínim absolut. Així, pel teorema de Bolzano, podem afirmar que:

- existeix una arrel en l'interval obert $(-1,1)$. Aquesta arrel és única ja que la funció és monòtona decreixent en aquest interval.

- existeix una altra arrel en l'interval $(1,3)$ que també és única per ser monòtona creixent en aquest interval.

Així no pot existir cap altra arrel d'aquesta funció en l'interval donat.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per justificar la continuïtat.

0,25 punts pel càlcul de la derivada.

0,25 punts per trobar l'abscissa del punt crític.

0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement.

0,25 punts per justificar el mínim relatiu.

b) 0,25 punts per mencionar les hipòtesis del teorema de Bolzano.

0,5 punts per justificar l'existència de dues arrels.

0,5 punts per la unicitat en cada interval a partir de la monotonia.

SÈRIE 5

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.

2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3. En alguns casos, la solució final pot admetre expressions equivalents. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

    - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.

    - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.

    - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.

    - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1.

[2,5 punts]

a)

La matriu *B* és invertible perquè els seus vectors columna (o fila) són independents (és a dir no proporcionals). Altrament perquè

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

I la seva inversa serà $B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}.$

b)

És possible aïllar la matriu X de l'expressió donada:

$$\mathrm{X} = \mathrm{B}^{-1} \cdot (\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A})$$

Comencem calculant el producte

$$\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -21 & 28 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\mathrm{C} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -21 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}.$$

Aleshores

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 23 & -16 \end{pmatrix}}.$$

Pautes de correcció:

a)

0,5 punts per l'argumentació que la matriu és invertible.

0,25 punts pel càlcul preliminar de la matriu inversa.

0,5 punts pel càlcul final.

b)

0,5 punts per aïllar la matriu X.

0,25 punts pel producte matricial.

0,25 punts per la diferència de matrius.

0,25 punts pel producte final.

2.

[2,5 punts]

a)

Per trobar els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$, estudiarem la seva derivada: $f'(x) = 3x^2 - 9$

Calculem $f'(x) = 0$, en aquest cas obtenim $3x^2 - 9 = 0$ i per tant, $x = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. Com que $f'(x)$ la podem escriure $3(x+\sqrt{3})\,(x - \sqrt{3})$, estudiarem el signe que assoleix la derivada segons els diferents intervals

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$3(x+\sqrt{3})$	-	0	+	+	+
$(x - \sqrt{3})$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	Creix	Màxim	Decreix	Mínim	Creix

Per tant, la funció creix en $(-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

I la funció decreix en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

b)

Trobem els punts de tall entre $f(x)$ i $g(x)$ per $x \geq 0$.

Calculem: $x^3 - 9x = 7x$, $x^3 - 9x - 7x = 0$ i per tant, $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = 0$, que s'anul·la en $x = \{0, -4, 4\}$. En el semiplà $x \geq 0$, la funció $f(x)$ i $g(x)$ es tallen en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$.

Així doncs, hem de calcular la integral definida:

$$\int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \int_0^4 (-x^3 + 16x)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 16\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 64 - 128 = \boxed{64\,u^2}.$$

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts per la funció derivada.

0,5 punts pel càlcul de les abscisses dels punts singulars.

0,25 punts per l'anàlisi i conclusions dels signe de la derivada primera.

0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement

b)

0,5 punts pel càlcul dels punts de tall

0,25 punts pel plantejament de la integral.

0,25 punts pel càlcul de la primitiva.

0,25 punts pel càlcul final de l'àrea.

3.

[2,5 punts]

a)

Per a què els punts siguin coplanaris el determinant dels vectors $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DB}}, \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ha de ser 0, per tant:

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+2a+a) - (1+2+a^2) = 0$, o sigui $a^2 - 3a + 2 = 0$,

i, per tant, $a = 1$ o bé $a = 2$.

Pel valor $a = 1$, els punts A i C són el mateix, en canvi per $\boxed{a = 2}$ tots els punts són diferents.

b)

Utilitzem la fórmula de l'àrea del triangle a l'espai: $S = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,-1,1) \times (0,-1,0) = (1,0,-1)$ i per tant l'àrea és $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\, u^2}$.

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts pel plantejament del determinant.

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,5 punts per les solucions possibles.

0,25 punts per la justificació del valor $a = 2$.

b)

0,25 punts pel càlcul dels dos vectors.

0,5 punts per càlcul del producte vectorial.

0,25 punts per la norma.

0,25 punts per la superfície.

4.

[2,5 punts]

a)

aplicant el teorema de Pitàgores $x^2 + y^2 = d^2$, i per tant $y^2 = d^2 - x^2$.

En substituir a la resistència *R* obtenim $\boxed{R = kxy^2 = kx(d^2 - x^2)}$

b)

Per trobar la resistència màxima derivem i igualem a 0:

$$R' = k\big((d^2 - x^2) + x(-2x)\big) = k(d^2 - 3x^2) = 0,$$

Per tant $\boxed{x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}}$, i $\boxed{y = \sqrt{d^2 - x^2} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}}$, es tracta d'un màxim atès que $R'' = -6kx$

$$\mathrm{R}''\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right) = -6k\frac{d\sqrt{3}}{3} < 0.$$

Per trobar la resistència d'aquesta biga cal substituir els valors de x, y:

$$\boxed{R_{max} = k\frac{d\sqrt{3}}{3}\left(\frac{d\sqrt{6}}{3}\right)^2 = kd^3\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

Pautes de correcció:

a)

0,75 punts per l'aplicació del Teorema de Pitàgores.

0,5 punts pel l'expressió final de R.

b)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel càlcul de l'abscissa del punt singular.

0,25 punts per la justificació de la condició de màxim.

0,25 punts per la segona dimensió i la resistència màxima final.

5.

[2,5 punts]

a)

Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre a.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 8 \\ 2 & 1 & -a & 1 \\ 3 & 0 & -3a & 1 \end{array}\right)$$

Càlcul del rang de la matriu del sistema i el de la matriu ampliada.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, per tant, $\text{Rang M} \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{vmatrix} = -3a - 6a - 3a + 12a = 0$

El determinant de la matriu del sistema és nul (zero) per a qualsevol valor del paràmetre a. Per tant, $\text{Rang M} = 2$, per a qualsevol valor del paràmetre a.

Orlant el menor d'ordre 2 no nul, amb la finalitat de trobar el rang de la matriu ampliada, tenim:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$, per tant, $\text{Rang } \overline{\text{M}} = 3$, per a qualsevol valor del paràmetre a.

Com a conclusió tenim:

$\text{Rang M} \neq \text{Rang } \overline{\text{M}}$ per a qualsevol valor del paràmetre a .

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, es tracta, efectivament, d'un sistema incompatible, no té solució, per a qualsevol valor del paràmetre a.

b)

Interpreteu geomètricament el sistema d'equacions lineals. Feu un dibuix esquemàtic que representi la posició relativa dels tres plans.

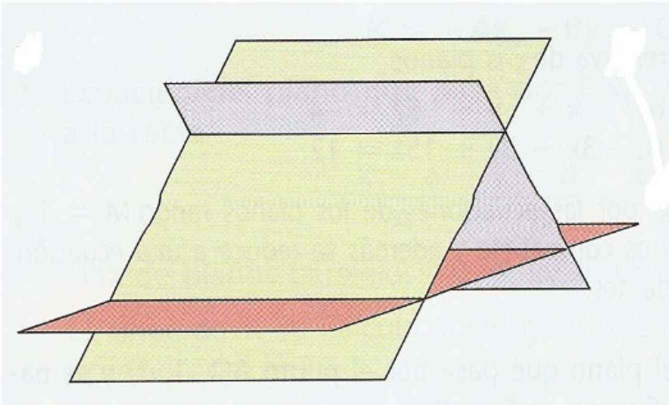
Cadascuna de les tres equacions es correspon amb un pla de l'espai tridimensional.

Sistema d'equacions incompatible, per tant, no hi ha cap punt de tall entre els tres plans.

No hi ha cap parell de plans paral·lels, atès que dels tres vectors normals (un vector normal a cada pla) no n'hi ha cap parell de proporcionals.

Els tres plans es tallen dos a dos en rectes paral·leles.

Dibuix esquemàtic:



Pautes de correcció:

a)

0,25 punts per les matrius del sistema.

0,25 punts pel rang de la matriu associada del sistema.

0,25 punts pel rang de la matriu ampliada del sistema.

0,5 punts aplicar el Teorema Rouché-Frobënius i la conclusió final.

Observació: En cas que l'estudiant no discuteixi el sistema de forma matricial es repartirà el punt entre les diferents parts que condueixen a la resolució.

b)

0,25 punts per raonar que no hi ha cap punt de tall comú.

0,25 punts per raonar que no hi ha cap parell de plans paral·lels

0,5 punts per raonar que es tallen dos a dos.

0,25 punts pel dibuix esquemàtic.

6.

[2,5 punts]

a)

Com que té un extrem relatiu en $x = -3$ i en $x = 1$, sabem que $f\,'(-3) = f\,'(1) = 0$.

$f\,'(x) = 6x^2 + 2mx + n$. Aleshores tenim que:

$f\,'(-3) = 54 - 6m + n = 0$

$f\,'(1) = 6 + 2m + n = 0$.

Resolent el sistema, obtenim que $\boxed{m = 6}$ i que $\boxed{n = -18}$.

D'aquesta manera sabem que $f(x) = 2x3 + 6x2 - 18x + p$.

Per a trobar la *p*, utilitzarem que $f(3) = 4$.

Per tant, $f(3) = 54 + 54 - 54 + p = 4$.

Aleshores, $\boxed{p = -50}$.

b)

Calculem $f\,'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$ i obtenim que per $x = -3$, $f\,'(-3) = -2/4 = -1/2$ que serà el pendent de la recta tangent.

Ara busquem el punt per on passarà que serà $(-3, f\,(-3)) = (-3, -2)$.

La recta tangent serà $y + 2 = -1/2\,(x + 3)$. L'equació serà $\boxed{y = -x/2 - 7/2}$

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel plantejament del sistema.

0,25 punts pel càlcul de *m*.

0,25 punts pel càlcul de *n*.

0,25 punts pel càlcul de *p*.

b)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel pendent de la recta tangent.

0,5 punts per les coordenades del punt de tangència (abscissa i ordenada)

0,25 punts per l'equació de la recta tangent.