

## Proves d'accés a la universitat

---

# Matemàtiques

## Sèrie 3

---

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que permetin emmagatzemar dades o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Considereu la funció polinòmica  $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$ .
  - a) Calculeu els valors dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$ , sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = 1$  i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa  $x = 0$  és la recta  $y = x + 3$ .  
[1 punt]
  - b) Per als valors  $a = 2$ ,  $b = 1$  i  $c = 3$ , calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los.  
[1 punt]
2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real  $a$ :
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$
  - a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre  $a$ .  
[1 punt]
  - b) Resoleu el sistema per al cas  $a = 1$ .  
[1 punt]
3. Considereu el pla que té com a vectors directores  $u = (-1, 3, 2)$  i  $v = (2, 1, 0)$  i que passa pel punt  $A = (1, 0, 3)$ .
  - a) Calculeu l'equació de la recta que és perpendicular al pla i passa pel punt  $A$ .  
[1 punt]
  - b) Calculeu la distància del punt  $P = (1, 5, 0)$  al pla.  
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades  $(x_0, y_0, z_0)$  al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4. Sigui la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , en què  $\alpha$  és un paràmetre real.

a) Hi ha algun valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $A$  no tingui inversa per a aquest valor?

[1 punt]

b) Calculeu la matriu inversa de  $A^2$  per a  $\alpha = 0$ .

[1 punt]

5. Considereu els punts de l'espai tridimensional  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (3, 5, 0)$  i  $C = (1, 0, 0)$  i la

recta  $r: x = y - 1 = \frac{z}{2}$ .

a) Trobeu el punt d'intersecció de la recta  $r$  amb el pla que passa pels punts  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

[1 punt]

b) Trobeu els punts  $P$  de la recta  $r$  per als quals el tetraedre de vèrtexs  $P$ ,  $A$ ,  $B$  i  $C$  té un volum de  $2u^3$ .

[1 punt]

NOTA: El volum d'un tetraedre de vèrtexs  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  i  $S$  es pot calcular amb l'expressió

$$\frac{1}{6} \left| \det(\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}) \right|.$$

6. Siguin les funcions  $f(x) = x^2 - 1$  i  $g(x) = 3 - x^2$ .

a) Feu un esbós de les gràfiques de les paràboles  $y = f(x)$  i  $y = g(x)$  en un mateix sistema d'eixos cartesianes i trobeu els punts de tall amb l'eix de les abscisses, els vèrtexs i els punts de tall entre les dues gràfiques.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà  $y \geq 0$  compresa entre les gràfiques de  $f(x)$  i  $g(x)$ .

[1 punt]



Institut  
d'Estudis  
Catalans