SÈRIE 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos, la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i s'han de comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o que no se'n puguin seguir els passos seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial, la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. Si és així, la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un mateix apartat s'han de valorar amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més transcendència, NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, cal valorar i puntuar el desenvolupament i la coherència de la resolució que en resulti, i només s'ha d'aplicar una penalització final de 0,25 punts.
- Si l'errada fa que alguna de les qüestions que es demanen no tingui sentit, la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades, la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ a la segona errada.

1. Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.
   a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió limitada per le gràfiques.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.
   [1 punt]

Resolució:

a) Calculem els punts d'intersecció per parelles de funcions.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \Longrightarrow x = 2x, x = 0, y = 0 \Longrightarrow \boxed{P = (0,0)}$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Longrightarrow x = x^2 \Longrightarrow x^2 - x = x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \ o \ x = 1$$

$$x = 0, y = 0 \Longrightarrow P = (0,0)$$

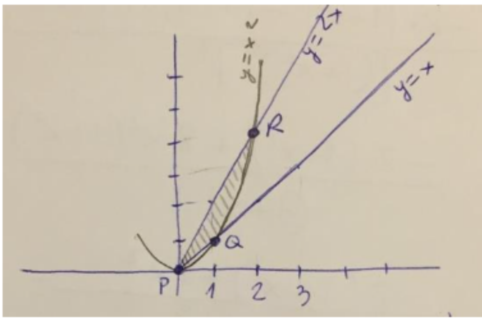
$$x = 1, y = 1 \Longrightarrow \boxed{Q = (1,1)}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \Longrightarrow 2x = x^2 \Longrightarrow x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \ o \ x = 2$$

$$x = 0, y = 0 \Longrightarrow P = (0,0)$$

$$x = 2, y = 4 \Longrightarrow \boxed{R = (2,4)}$$

I quan en fem l'esbós, obtenim la representació gràfica següent:



b) Per calcular l'àrea del recinte, l'hem de descompondre en dues parts: d'una banda, la part limitada per la recta $y = 2x$ i, d'una altra, la recta $y = x$ i la part limitada per la recta $y = 2x$ i la paràbola.

$$S = \int_0^1 (2x - x)dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

Observació: les descomposicions alternatives del recinte que siguin correctes també es donen per bones. Per exemple:

$$S=\int_0^2 (2x-x^2)dx-\int_0^1 (x-x^2)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$
$$=4-\frac{8}{3}-0-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{24-16-3+2}{6}=\boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

Pautes de correcció:

***a*)**
0,25 punts pel punt P.
0,25 punts pel punt Q.
0,25 punts pel punt R.
0,25 punts per l'esbós.

***b*)**
0,25 punts pel plantejament de les integrals.
0,25 punts pel càlcul de les primitives.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final.

2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

   a) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.
   [1 punt]

   b) Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1: x + (a-1)z = 0, \pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 4x + 3a\,y + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre a.
   [1 punt]

Resolució:

a) La matriu A és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{vmatrix} = a + 3a(a-1) - 4a(a-1) - 3a = -a^2 - a$$
$$= -a(a+1)$$

$\boxed{\text{Per tant, } A \text{ és invertible si i només si } a \neq 0 \text{ i } a \neq -1.}$

b) Cal discutir el sistema d'equacions lineals amb matriu i matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 4 & 3a & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- En l'apartat anterior ja hem vist que $rang(A) = 3$ si i només si $a \neq 0$ i $a \neq -1$. En aquest cas, el sistema d'equacions és compatible i determinat, té una única solució i $\boxed{\text{es tracta de tres plans que es tallen en un punt.}}$

- Per a $a = 0$ tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) < 3$, però és clar que $\text{rang(A)} = 2$ (perquè la primera i la segona fila no són proporcionals) i, en canvi, calculant el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 1 + 3 = 1 \neq 0$$

observem que $\text{rang}(MA) = 3$.

D'això se'n dedueix que el sistema és incompatible i que, per tant, no hi ha cap punt comú als tres plans.

Es tracta de tres plans que es tallen dos a dos (perquè dos a dos no són paral·lels en no ser proporcionals els respectius vectors normals) en rectes paral·leles.

- Per a $a = -1$ tenim $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

$\text{rang}(A) < 3$, però és clar que $\text{rang}(A) = 2$ (la primera i la segona fila no són proporcionals) i, en canvi, calculant el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 - 1 + 6 = 0,$$

observem que $\text{rang}(MA) = 2$.

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(MA) = 2$ i el sistema és compatible indeterminat amb (3-2=1) un grau de llibertat. Es tracta de tres plans que es tallen en una recta.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament de nul·litat del determinant.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts pel càlcul dels valors d'a.
0,25 punts per la resposta final.

b)
0,25 punts pel plantejament general a partir de la discussió del sistema.
0,25 punts pel primer cas.
0,25 punts pel segon cas.
0,25 punts pel tercer cas.

3. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
[1 punt]

b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.
[1 punt]

Resolució:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Si suposem que el determinant de la matriu A fos NO nul (diferent de zero), la matriu inversa d'A existiria. Multiplicant la matriu inversa d'A per l'esquerra d'ambdós membres de l'expressió $A \cdot B = 0$, obtindríem

$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0$, i, per tant, $B = 0$, que contradiria el supòsit que les dues matrius són no nul.les.

El raonament es pot reproduir per a la matriu B.

Per tant, el determinant de la matriu A i el de la matriu B han de ser nuls.

Comentari: qualsevol altre raonament equivalent i correcte serà igualment ben valorat.

Pautes de correcció:

a)
0,5 punts pel primer producte.
0,5 punts pel segon producte.

b)
0,25 punts pel plantejament de reducció a l'absurd.
0,25 punts per l'existència de la inversa.
0,25 punts per la conclusió de la nul·litat.
0,25 punts per l'argument equivalent per a l'altra matriu.

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.
   [1 punt]
   b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.
   [1 punt]

Resolució:

a) Que la recta tangent sigui horitzontal vol dir que té pendent zero. Per tant, ens estan demanant la recta tangent en aquells punts que la derivada sigui 0.

Calculem la funció derivada i la igualem a 0:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

La funció derivada només s'anul.la pel valor $x = 0$. Tenim $f(0) = 1$ i $f'(0) = 0$.

Per tant, l'equació de la recta tangent serà

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0(x-0) + 1 = 1$$

$$\boxed{y = 1.}$$

Comentari: per a l'equació de la recta tangent també es pot fer servir directament, en saber que és horitzontal, l'ordenada del punt de la gràfica.

b) El pendent de la recta tangent és la funció derivada. Per tant, ens estan demanant el màxim de la funció derivada. Els candidats a màxim de la funció derivada són els zeros de la funció derivada de la funció derivada, és a dir, els zeros de la derivada segona $f''(x)$. Calculem $f''(x)$, la igualem a 0 i resolem la igualtat.

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)\,2(1+x^2)\;\;2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)\quad + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

Per tant, $f''(x) = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

A partir d'aquests valors singulars, els intervals de creixement i decreixement per a la funció derivada seran

	$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$
Signe de f''	+	-	+
Creix/Decreix f'	↗	↘	↗

Per tant, el pendent serà màxim en el punt d'abscissa $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ i ordenada

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

És a dir, al punt $\boxed{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)}$.

Comentari: per a la determinació del màxim, l'estudiant pot, alternativament, en lloc de fer servir els intervals de creixement i decreixement de f', a partir del signe de f'', estudiar el signe de la següent derivada (f''') en els punts candidats. Als efectes escaients:

$$f'''(x)=\frac{24x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel càlcul de la derivada.
0,25 punts per la igualació a 0.
0,25 punts pel punt de tangència.
0,25 punts per l'equació de la recta tangent.

b)
0,25 punts per l'argument d'anul·lar la derivada segona (fet o no fet explícitament).
0,25 punts pel càlcul de la derivada segona.
0,25 punts pels punts singulars.
0,25 punts pels intervals i el punt final.

5. Siguin P, Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX, OY i OZ, respectivament.
   a) Calculeu els punts P, Q i R, i el perímetre del triangle de vèrtexs P, Q i R.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R.
   [1 punt]

   Nota: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors v i w podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2}\|v \times w\|$, en què $v \times w$ és el producte vectorial del vectors v i w.

Resolució:

a)
Eix OX: $x = ?, y = 0, z = 0 \implies x = 4 \implies \boxed{P = (4,0,0)}$
Eix OY: $y = ?, x = 0, z = 0 \implies 4y = 4 \implies y = 1 \implies \boxed{Q = (0,1,0)}$
Eix OZ: $z = ?, x = 0, y = 0 \implies 2z = 4 \implies z = 2 \implies \boxed{R = (0,0,2)}$

El perímetre serà $\|\overrightarrow{PQ}\| + \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{QR}\| = \|(-4,1,0)\| + \|(-4,0,2)\| + \|(0,-1,2)\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 0} + \sqrt{(-4)^2 + 0 + 2^2} + \sqrt{0 + (-1)^2 + 2^2} =$
$\boxed{\sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{17} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \cong 10{,}83\ u}$.

b) Si apliquem l'expressió de la fórmula, obtenim la igualtat següent:
$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|$.
Calculem el producte vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & -4 & -4 \\ j & 1 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,8,4).$$

Per tant, $S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 8^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 64 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{84} = \frac{2}{2}\sqrt{21} =$
$\boxed{\sqrt{21} \cong 4{,}58\ u^2.}$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel càlcul dels punts P, Q i R.
0,25 punts pel càlcul dels vectors.
0,25 punts pel càlcul de les normes.
0,25 punts per l'expressió final (amb radicals o aproximada).

b)
0,5 punts pel càlcul del producte vectorial.
0,5 punts pel càlcul de la norma i l'expressió final (amb radical o aproximada).

6. Considereu la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
   a) Calculeu el domini de la funció f, els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f, les rectes $x = 1$ i $x = e$, i l'eix de les abscisses.
   [1 punt]

Resolució:

a) Per poder avaluar la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ necessitem poder calcular el logaritme neperià del numerador (això vol dir que x sigui estrictament positiva) i poder dividir (és a dir, que x no sigui 0). Així doncs, $\boxed{dom(f) = (0, +\infty)}$.

Com que $x = 0$ no pertany al domini de la funció, $\boxed{\text{no hi ha intersecció amb l'eix } OY}$.
Com que $f(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$, $\boxed{\text{la intersecció amb l'eix } OX \text{ és } (1, 0)}$.

Per als intervals de creixement cal estudiar el signe de la funció derivada primera.
La funció derivada és $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.
Resolent $f'(x) = 0$ s'obté com a única solució $x = e$. Així doncs, els intervals de creixement són els següents:

$(0, e)$	$(e, +\infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$
f creixent	f decreixent

b) Comencem calculant una primitiva de la funció f (és quasiimmediata):

$$F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

A l'interval $(1, e)$ la funció f és sempre positiva o zero. Per tant:

$$A = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2}\Big|_1^e = \frac{\ln^2(e)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}\, u^2}.$$

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts pel domini de la funció.
0,25 punts pels punts d'intersecció amb els eixos.
0,25 punts per la funció derivada.
0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement.

b)

0,25 punts per l'argument de positivitat o pel valor absolut en la integral.
0,25 punts pel plantejament de la integral.
0,25 punts per la primitiva.
0,25 punts per l'aplicació correcte de la regla de Barrow i la substitució final.