

# Matemàtiques

## Sèrie 5

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Considereu les rectes  $y = x$  i  $y = 2x$ , i la paràbola  $y = x^2$ .
  - a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió delimitada per les gràfiques.  
[1 punt]
  - b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.  
[1 punt]

2. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$ , en què  $a$  és un paràmetre real.

- a) Trobeu els valors del paràmetre  $a$  per als quals la matriu és invertible.  
[1 punt]
- b) Discutiu la posició relativa dels plans  $\pi_1: x + (a-1)z = 0$ ,  $\pi_2: x + ay + z = 1$  i  $\pi_3: 4x + 3ay + z = 3$  en funció dels valors del paràmetre  $a$ .  
[1 punt]

3. Siguin les matrius  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Calculeu  $A \cdot B$  i  $B \cdot A$ .  
[1 punt]
- b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.  
[1 punt]

4. Considereu la funció  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.

[1 punt]

b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció  $f(x)$  en què el pendent de la recta tangent és màxim.

[1 punt]

5. Siguin  $P$ ,  $Q$  i  $R$  els punts d'intersecció del pla d'equació  $x + 4y + 2z = 4$  amb els tres eixos de coordenades  $OX$ ,  $OY$  i  $OZ$ , respectivament.

a) Calculeu els punts  $P$ ,  $Q$  i  $R$ , i el perímetre del triangle de vèrtexs  $P$ ,  $Q$  i  $R$ .

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs  $P$ ,  $Q$  i  $R$ .

[1 punt]

NOTA: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$  podeu fer servir

l'expressió  $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ , en què  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  és el producte vectorial dels vectors

$\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$ .

6. Considereu la funció  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .

a) Calculeu el domini de la funció  $f$ , els punts de tall de la gràfica de  $f$  amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de  $f$ .

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció  $f$ , les rectes  $x = 1$  i  $x = e$ , i l'eix de les abscisses.

[1 punt]



Institut  
d'Estudis  
Catalans