SÈRIE 1

1.

a)

Escrivim el sistema en forma matricial. La matriu de coeficients i la matriu ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem el determinant de la matriu A:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 4k - 3 = -(k-1)(k-3)$$

que s'anul·la per als valors de $k = 1$ i $k = 3$. Així,

- per a $k \neq 1$ i $k \neq 3$, el determinant de A no s'anul·la. Aleshores, $rang\ (A) = rang\ (A') = 3$, que també coincideix amb el número d'incògnites, i es tracta d'un sistema compatible determinat.

- per a $k = 1$, tenim el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

  Les dues primeres equacions són idèntiques per tant, el $rang\ (A)$ i el $rang\ (A')$ no seran màxims.

  Calculant rangs tenim que $rang(A) = rang(A') = 2 < 3$. Tenim 3 incògnites, per tant, és un sistema compatible indeterminat.

- per a $k = 3$ s'obté el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

En aquest cas, la primera i la tercera equació són idèntiques en la part de les incògnites però no en els termes independents, amb això ja podem afirmar que es tracta d'un sistema incompatible.

També es poden estudiar els rangs per veure que $rang(A) = 2 \neq rang(A') = 3$.

b)

Per a $k = 1$, el sistema és:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Com que la primera i la segona equació són iguals, se'n pot eliminar una: es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Prenem $z = t$, s'obté que la solució és: $x = \frac{7}{2} - t, y = \frac{1}{2}, z = t$ amb $t \in R$

Les dues primeres equacions del sistema, que són iguals, corresponen a un mateix pla. La tercera equació correspon a un pla que talla a l'anterior en una recta.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la representació matricial del sistema.

0,25 punts per arribar als valors crítics per a la discussió.

0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 per a cada cas)

b) 0,25 punts per observar que és un sistema compatible indeterminat.

0,75 punts per la solució. Es valorarà correctament tant si ho fan pel mètode de Gauss com per substitució o igualació.

0,25 punts per la interpretació geomètrica.

2.

a)

L'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt $x = 1$ és:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

Fem els càlculs:

$$f(x) = \frac{4}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-4}{x^2}$$

Així

$$f(1) = 4 \text{ i } f'(1) = -4$$

L'equació de la recta tangent demanada és:

$$y - 4 = -4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = -4x + 8 \rightarrow 4x + y = 8$$

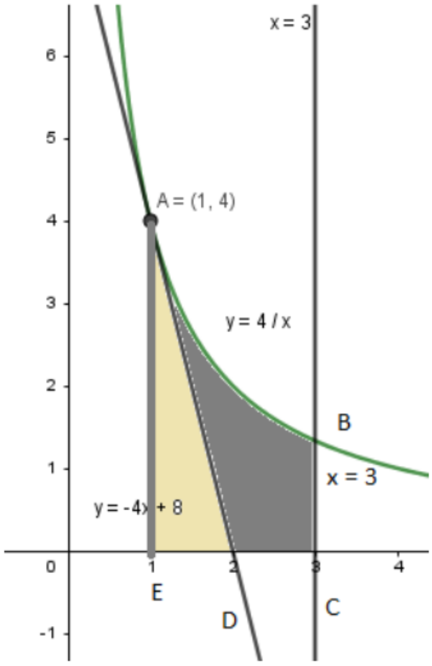
L'equació de la recta normal es pot calcular a partir de l'equació:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

$$y - 4 = \frac{-1}{-4} \cdot (x - 1) \rightarrow 4y - 16 = x - 1 \rightarrow x - 4y = -15$$

b)

Per fer l'esbós de la gràfica n'hi ha prou veient que:



- $x = 0$ no és del domini
- f és continua
- $f'(x) = -\frac{4}{x^2} < 0$, per tant, f és decreixent
- Els eixos de coordenades són rectes asímptotes a la funció.

La recta donada, és la recta tangent en el punt $(1,4)$.

L'àrea demanada és la regió $ABCD$, que es pot obtenir restant l'àrea del triangle ADE, de la regió $ABCE$:

$$A_T = \int_1^3 \frac{4}{x}\,dx - A_{ADE} = [4\,ln(x)]_1^3 - \frac{1 \cdot 4}{2} =$$

$$= 4[(ln(3) - ln(1)] - 2 = 4\,ln(3) - 2 = 2{,}39u^2$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament, on es digui que la recta tangent té pendent $f'(a)$.

   0,5 punts per l'expressió de la recta tangent.

   0,5 punts per l'expressió de la recta normal.

b) 0,5 punts per l'esbós de la gràfica.

   0,25 punts pel plantejament, on s'indiqui que l'àrea es pot obtenir com a diferència de dues àrees calculables o com a suma de dues integrals definides.

   0,5 punts pel valor final de l'àrea demanada.

3.

a)

Quatre punts són coplanaris si pertanyen al mateix pla. Considerem els tres vectors que tenen origen en un dels punts, per exemple, el punt B i extrem en cada un dels altres tres punts:

$\overrightarrow{BA} = (3,1,0), \overrightarrow{BC} = (4,1,1)$ i $\overrightarrow{BD} = (1,1,t-1)$

Per a que els quatre punts siguin coplanaris, cal que aquests tres vectors siguin linealment dependents, és a dir:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = 3t - 3 + 1 - (3 + 4t - 4) = -t - 1 = 0 \rightarrow t = -1$$

Així per $t = -1$ els quatre punts donats són coplanaris.

b)

Per $t \neq -1$, els quatre punts no són coplanaris, per tant, formaran un tetraedre.

Per calcular-ne el volum fem servir la fórmula $V = \frac{1}{6}\left|det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right)\right|$:

$$\text{Així, } V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{matrix}\right\| = \frac{|-t-1|}{6}$$

Atès que volem trobar t tal que $V = 5u^3$ tenim que:

$$V = \frac{|-t-1|}{6} = 5 \rightarrow |-t-1| = 30 \rightarrow \begin{cases} -t-1 = 30 \\ -t-1 = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -31 \\ t = 29 \end{cases}$$

De manera que tenim dues solucions: $t = -31$ i $t = 29$.

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel plantejament, on s'indiqui la condició per a que quatre punts siguin coplanaris.

0,5 punts per la solució.

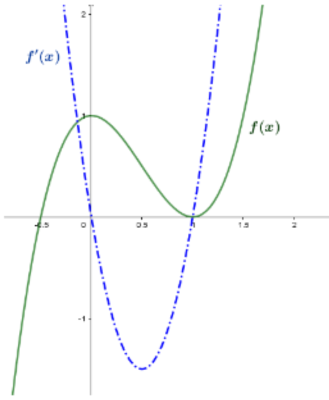
b) 0,5 punts pel plantejament, on s'associï el volum a la fórmula donada.

0,5 punts pel volum en funció de t.

0,5 punts per a les dues solucions.

4.

a)



- La funció derivada passa pels punts $(0,0)$ i $(1,0)$ perquè són els punts on $f(x)$ presenta els extrems relatius.
- $f(x)$ és creixent quan $x < 0$ i quan $x > 1$ per tant la funció derivada és positiva en aquestes dues semirectes.
- $f(x)$ és decreixent quan $0 < x < 1$ per tant, en aquest interval la derivada és negativa.
- La funció $f(x)$ té un punt d'inflexió en un punt proper a $x = \frac{1}{2}$ que coincidirà amb un mínim en la funció derivada.

b)

Imposem que $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ i que $g''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

- $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1 \rightarrow g'(x) = 3ax^2 + 2bx \rightarrow 3a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2b\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \rightarrow 3a + 4b = -6$
- $g''(x) = 6ax + 2b \rightarrow 6a\frac{1}{2} + 2b = 0 \rightarrow 3a + 2b = 0$

D'aquestes dues equacions

$$\begin{cases} 3a + 4b = -6 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

es dedueix que $a = 2$ i $b = -3$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts per la gràfica de la funció derivada

   0,25 punts per observar que als extrems relatius la derivada s'anul·la

   0,25 punts per observar el signe de la derivada segons el creixement i el decreixement

   0,25 punts per observar que el mínim de la funció derivada coincideix amb el punt d'inflexió

b) 0,25 punts per la primera derivada

   0,25 punts per la segona derivada

   0,25 punts per la condició en la primera derivada

   0,25 punts per la condició en la segona derivada

   0,25 punts per trobar els valors de a i de b.

5.

a)

Calculem el determinant de la matriu A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = a(a^2 - 3a + 2) = a(a-1)(a-2)$$

Aleshores, per a tot $a \neq 0, 1, 2$ tenim que $|A| \neq 0$ i la matriu és invertible.

b)

Per $a = 3$ la matriu és $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

El determinant de la matriu A és $|A| = 6 \neq 0$, per tant, A és invertible. Calculem la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Així, podem resoldre l'equació donada, multiplicant per l'esquerra cada banda de l'equació per la matriu inversa de A:

$$A \cdot X = B - 3I \ \rightarrow \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \ \rightarrow \ X = A^{-1} \cdot (B - 3I)$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment obtenim X:

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3I) = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel determinant de A.

   0,5 punts pels valors que fan que la matriu sigui invertible

b) 0,25 punts per justificar que A és invertible

   0,5 punts per resoldre l'equació matricial per trobar X

   0,5 punts pel càlcul de la matriu inversa de A

   0,25 punts pel càlcul final de la matriu X

6.

a)

Per trobar els punts crítics, calculem la primera derivada i la igualem a zero:

$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x = 0$ o bé $x = 3$

Tenim dos punts crítics $x = 0$ i $x = 3$. Classifiquem-los a partir del signe de la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \geq 3 \\ < 0 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Així per $x < 3$ la funció és decreixent i per $x > 3$ la funció és creixent. Cal tenir en compte que per $x = 2$ la funció no està definida. Així la funció és decreixement en: $(-\infty, 2) \cup (2,3)$ i és creixent en $(3, +\infty)$. Si es considera monotonia estricta caldria excloure també $x = 0$.

Com que en un entorn de $x = 0$ la funció és decreixent i és un punt crític, es tracta d'un punt d'inflexió.

En canvi per $x < 3$ la funció és decreixent i per $x > 3$ la funció és creixent, per tant, en $x = 3$ fa un mínim relatiu.

b)

La funció és continua en l'interval $(-2,1)$ ja que és un quocient de polinomis, que són funcions contínues i el denominador no s'anul·la. Avaluem la funció en els extrems de l'interval:

$f(-2) = \frac{-8}{-4} = 2 > 0$ i $f(1) = \frac{1}{-1} = -1 < 0$

Pel teorema de Bolzano podem afirmar que f té com a mínim un zero en l'interval $(-2,1)$. Com que la funció és estrictament monòtona en aquest interval, només té un zero dins d'aquest interval. De fet, és fàcil veure que $f(0) = 0$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la primera derivada

   0,25 punts pels punts crítics.

   0,5 punts pels intervals de creixement i decreixement.

   0,25 punts per justificar el punt d'inflexió

   0,25 punts per justificar el mínim relatiu.

b) 0,25 punts pel comprovar les hipòtesis del teorema de Bolzano

   0,25 punts per avaluar la funció en els extrems de l'interval

   0,25 punts per afirmar que la funció té un zero

   0,25 punts per justificar que el zero és únic.