MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Los ejercicios se han resuelto utilizando los métodos más habituales. No obstante, cualquier otro método debidamente razonado y justificado será admitido como válido.

1A. Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a $7m$ euros el kilogramo y la sal a $2m$ euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22,5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado $98m$ euros.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades de azúcar y de sal compradas.

b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese 0,2 euros por kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

Solución:

a) Si representamos por x e y la cantidad de azúcar y de sal comprada, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 22{,}5 \\ 7mx+2my & = & 98m \end{array}\right.$$

b) Dos de las posibles formas de realizar la discusión de este sistema son:

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22{,}5 \\ 7m & 2m & 98m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22{,}5 \\ 0 & -5m & -59{,}5m \end{array}\right)$$

  Como $-5m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ se tiene que:
  - Si $m = 0$, la última fila representa la ecuación $0x + 0y = 0$, con lo que el sistema es compatible indeterminado.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7m & 2m \end{vmatrix} = -5m = 0 \Longleftrightarrow m = 0$$

  se tiene que:
  - Para $m = 0$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 22{,}5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22{,}5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow ran(A') = ran(A) = 1,$$

    y como hay dos incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.
  - Para $m \neq 0$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = 0$	*S.C.I.*
$m \neq 0$	*S.C.D.*

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de m y dicha solución es única si $m \neq 0$. En concreto tiene solución para el caso $m = 0{,}1$, con lo que es posible que el precio de la sal fuese de 0,2 euros por kilogramo, siempre que las soluciones obtenidas en ese caso sean números no negativos.

Si $m = 0{,}1$, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 0{,}1$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & -5{,}95 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 22{,}5 \\ & - & 0{,}5y & = & -5{,}95 \end{array}\right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{\begin{array}{l} y = -5{,}95/-0{,}5 = 11{,}9 \\ x = 22{,}5 - 11{,}9 = 10{,}6 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = -5m$, con lo que si $m = 0{,}1$ se tiene que $|A| = -0{,}5$.
  Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \left|\begin{array}{cc} 22{,}5 & 1 \\ 9{,}8 & 0{,}2 \end{array}\right| = -5{,}3, \qquad |A_y| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 22{,}5 \\ 0{,}7 & 9{,}8 \end{array}\right| = -5{,}95.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-5{,}3}{-0{,}5} = 10{,}6, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-5{,}95}{-0{,}5} = 11{,}9.$$

Así, si la sal cuesta a 0,2 euros el kilogramo ($m = 0{,}1$), se habrían comprado 10,6 kilogramos de azúcar.

1B. Una empresa monta dos tipos de palés. Cada palé tipo A requiere 3 horas de preparación en el taller $T1$ y 4 horas de preparación en el taller $T2$. Cada palé tipo B requiere 1 hora de preparación en el taller $T1$ y 3 horas de preparación en el taller $T2$. Cada semana, se dispone de un total de 30 horas de uso del taller $T1$ y de 60 horas de uso del taller $T2$. Cada palé tipo A contiene 1 caja y cada palé tipo B contiene 2 cajas, existiendo un compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos palés de cada tipo puede preparar en una semana para cumplir con todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría preparar 4 palés de cada tipo en una semana?

b) **[0,75 puntos]** Si se obtiene un beneficio neto de 2000 euros con la venta de cada palé tipo A y de 1000 euros con cada palé tipo B, ¿cuántos debería preparar de cada tipo para maximizar el beneficio neto? ¿a cuánto ascendería dicho beneficio?

Solución:

a) Si representamos por x e y el número de palés de tipo A y B, respectivamente, que prepara en una semana, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+y & \leq & 30 \\ 4x+3y & \leq & 60 \\ x+2y & \geq & 4 \\ x,y & \geq & 0 \end{cases}$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto sombreado en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son $A=(4,0)$, $B=(10,0)$, $C=(6,12)$, $D=(0,20)$ y $E=(0,2)$.

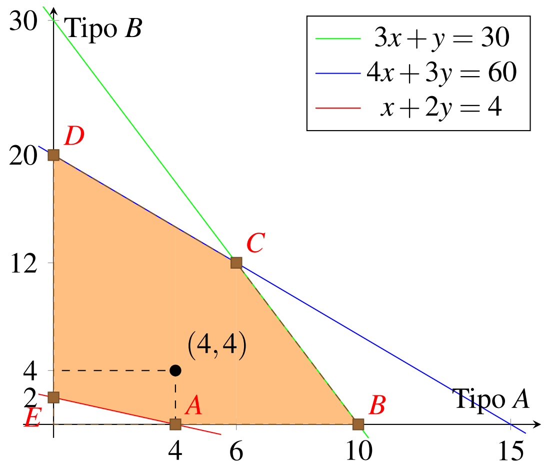

Figura 1: Región factible.

Sí, se podrían preparar 4 palés de cada tipo en una semana, puesto que el punto $(4,4)$ pertenece a la región factible, como puede verse en la figura 1 o comprobando que $3x+y=16\leq 30$, $4x+3y=28\leq 60$ y $x+2y=12\geq 4$.

b) El beneficio es $z(x,y)=2000x+1000y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Los valores en los extremos del recinto son:

$$\begin{aligned} z(A) &= 8000 \text{ euros} \\ z(B) &= 20000 \text{ euros} \\ z(C) &= 24000 \text{ euros} \\ z(D) &= 20000 \text{ euros} \\ z(E) &= 2000 \text{ euros} \end{aligned}$$

por lo que el beneficio máximo se alcanza si se preparan 6 palés de tipo A y 12 de tipo B, ascendiendo dicho beneficio a 24000 euros.

2A. Dada la función $f(x)=\frac{a\cdot x}{3\cdot x^2+1}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de a que verifica que $F(0)=0$ y $F(1)=\frac{4}{3}\cdot ln(4)$, donde F denota una primitiva de f.

b) **[2 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x=-1$ y $x=1$.

Solución:

a) Como $f(x)=\frac{ax}{3x^2+1}$, entonces

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{ax}{3x^2+1}dx=\frac{a}{6}\cdot ln|3x^2+1|+C$$

Así, puesto que $F(0)=\frac{a}{6}\cdot ln(1)+C=0$ se obtiene que $C=0$ y como $F(1)=\frac{a}{6}\cdot ln(4)=\frac{4}{3}\cdot ln(4)$ se llega a que $a=6\frac{4}{3}=8$. Por lo tanto, podemos concluir que $F(x)=\frac{4}{3}\cdot ln(3x^2+1)$.

b) Como $f(x)=\frac{8x}{3x^2+1}$, el dominio de f son todos los números reales, puesto que es un cociente de polinomios y el denominador nunca se anula ($3x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$).

La función f corta al eje de ordenadas en el punto $(0,f(0))$, es decir, en el punto $(0,0)$. Además como $f(x)=0\Leftrightarrow 8x=0\Leftrightarrow x=0$, se tiene que f no corta al eje de abscisas en ningún otro punto.

La función f es continua en todo su dominio, puesto que es el cociente de dos polinomios y, como acabamos de comentar, el denominador no se anula nunca.

En cuanto a las asíntotas, no tiene asíntotas verticales, puesto que no tiene puntos de discontinuidad. En cuanto a las asíntotas horizontales,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x}{3x^2+1}\right)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8x}{3x^2+1}\right)=0$$

con lo cual la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de la función.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su derivada:

$$f'(x)=\frac{8(3x^2+1)-8x(6x)}{(3x^2+1)^2}=\frac{8(1-3x^2)}{(3x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow 1-3x^2=0\Leftrightarrow x=\frac{\pm\sqrt{3}}{3}\approx\pm 0{,}58.$$

Para averiguar si estos puntos son un mínimo o un máximo relativo, procedemos por el criterio de la segunda derivada. Así, al ser

$$f''(x)=8\frac{-6x(3x^2+1)^2-(1-3x^2)2(3x^2+1)6x}{(3x^2+1)^4}=48\frac{-x(3x^2+1)-(1-3x^2)2x}{(3x^2+1)^3}=\frac{144x(x^2-1)}{(3x^2+1)^3}$$

se tiene que $f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-4\sqrt{3}<0$ y $f''\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=4\sqrt{3}>0$, con lo que en $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ hay un máximo relativo y en $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ hay un mínimo relativo. Obsérvese además que $f(\sqrt{3}/3)=\frac{4}{3}\sqrt{3}\approx 2{,}31$ y que $f(-\sqrt{3}/3)=-\frac{4}{3}\sqrt{3}\approx -2{,}31$.

De lo anterior se deduce que f es decreciente en $(-\infty,-\sqrt{3}/3)$, creciente en $(-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$ y vuelve a decrecer en $(\sqrt{3}/3,\infty)$.

Como $f''(x)=\frac{144x(x^2-1)}{(3x^2+1)^3}=0\Leftrightarrow x=0$, $x=-1$ y $x=1$ y el signo de la segunda derivada en los intervalos formados por estos puntos es:

$-\infty$		-1		0		1		∞
	$-$		$+$		$-$		$+$	

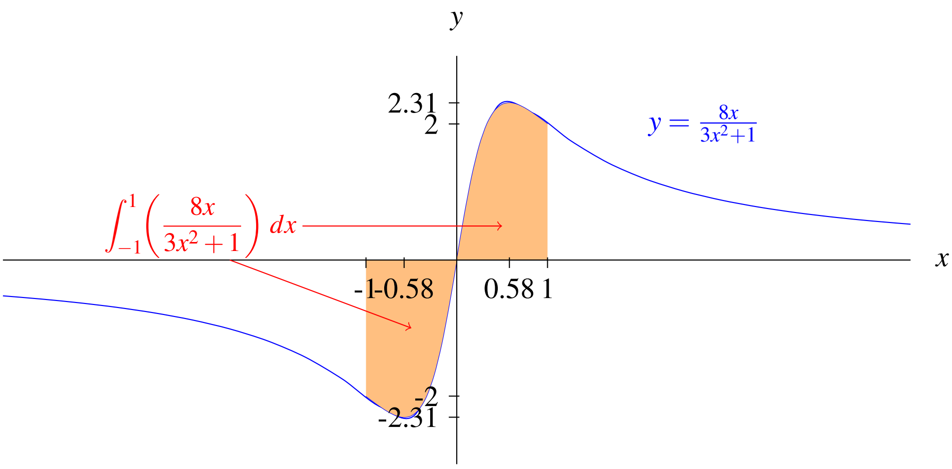

Figura 2: Representación gráfica de f.

los puntos de inflexión de f son -1, 0 y 1 y la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ y cóncava hacia arriba en $(-1,0)\cup(1,\infty)$. Además se tiene que $f(-1)=-2$ y $f(1)=2$.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de la función f es la que aparece en la figura 2.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x=-1$ y $x=1$ es igual a:

$$\left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right| = |F(0)-F(-1)| + |F(1)-F(0)| =$$

$$\left|0-\frac{4}{3}ln(4)\right| + \left|\frac{4}{3}ln(4)-0\right| = \frac{8}{3}ln(4) = \frac{16}{3}ln(2) \approx 3,687.$$

2B. Se ha investigado el tiempo en minutos (f) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento en días (x) de los deportistas, obteniéndose que:

$$f(x) = 2 + \frac{300}{x+30}, \qquad x \geq 0.$$

a) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿Aumenta en algún momento el tiempo que se tarda en realizar la prueba?

b) **[0,5 puntos]** Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 2 minutos? ¿Cuánto tiempo hay que entrenar para realizar la prueba en menos de 4 minutos?

Solución:

a) f es una función que está definida en todo el intervalo $[0,\infty)$, puesto que $x+30>0$ para todo $x\geq 0$.

En cuanto a los puntos de corte:

- $f(0) = 12$.

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 360 = 0$, pero esa igualdad no se da para ningún valor positivo de x (la solución es $x = -180$), con lo que $f(x) \neq 0, \forall x \in [0, \infty)$, es decir, la función no corta el eje de abscisas en ningún punto de su dominio.

f es continua en todo su dominio, puesto que es un cociente de polinomios, cuyo denominador no se anula en ningún punto del dominio.

Respecto a la monotonía, si derivamos esta función se obtiene:

$$f'(x) = \frac{-300}{(x+30)^2} < 0, \forall x \in [0, \infty)$$

con lo que f siempre decrece.

En cuanto a la derivada segunda, $f''(x) = \frac{600}{(x+30)^3} > 0$ para todo x positivo, con lo que f es cóncava hacia arriba.

Por último,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$$

con lo que la función tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 3.

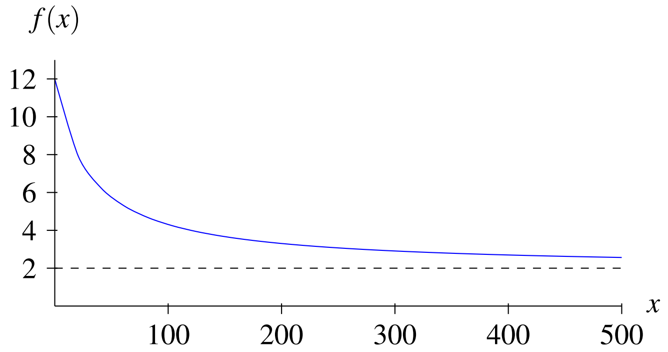

Figura 3: Representación gráfica de f.

Tanto de la representación gráfica, como del estudio anterior, se deduce que el tiempo no aumenta nunca.

b) Como la función es decreciente y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$, se tiene que no se alcanza nunca un valor menor de 2.

Sin embargo, sí que pueden alcanzarse tiempos menores de 4. De hecho, $f(x) = 4 \Leftrightarrow 300 = 2x + 60 \Leftrightarrow x = 120$, con lo que la prueba le llevará menos de 4 minutos si entrena más de 120 días.

3A. Cierto estudio de mercado revela que el 45 % de los entrevistados consume el producto A y el 60 % de los entrevistados consume el producto B. Además se obtiene que el porcentaje de entrevistados que consume ambos productos es del 20 %. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados,

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma el producto A, pero no consuma el producto B?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma alguno de los dos productos?

Solución: Si denotamos por A el suceso «consumir el producto A» y por B el suceso «consumir el producto B», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(A) = 0{,}45$$
$$P(B) = 0{,}6$$
$$P(A \cap B) = 0{,}2$$

y de aquí se obtiene que:

a) La probabilidad de que consuma el producto A y no el B es:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}45 - 0{,}2 = 0{,}25$$

b) La probabilidad de que consuma alguno de los dos productos, es decir, que consuma A o B es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45 + 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}85$$

3B. Los estudiantes de un instituto pueden optar por cursar inglés o francés. En un determinado curso hay 500 estudiantes, de los que 460 estudian inglés y el resto francés. La mitad de los estudiantes que estudian inglés son mujeres. De los que estudian francés, el 75 % son mujeres.

a) **[1,25 puntos]** Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) **[1,25 puntos]** Elegida una estudiante al azar entre las mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?

Solución: Si denotamos por I el suceso «estudia inglés», por F el suceso «estudia francés » y por M el suceso «ser mujer», los datos del enunciado se traducen en:

$$\begin{array}{ll} P(I) = 0{,}92 & P(F) = 0{,}08 \\ P(M/I) = 0{,}5 & P(M/F) = 0{,}75 \end{array}$$

a) La probabilidad de que sea mujer es:

$$P(M) = P(M \cap I) + P(M \cap F) = P(M/I)P(I) + P(M/F)P(F) = 0{,}5(0{,}92) + 0{,}75(0{,}08) = 0{,}52.$$

b) La probabilidad pedida es:

$$P(F/M) = \frac{P(M \cap F)}{P(M)} = \frac{0{,}75(0{,}08)}{0{,}52} = 3/26 \approx 0{,}115.$$

4A. Antes de un referéndum, se desea realizar un estudio para estimar los resultados del mismo.*

a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que votarán *SÍ* a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,04 y un nivel de confianza del 99 %?

b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 500 votantes se obtuvo que 100 de ellos tienen la intención de votar *SÍ*. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que votarán *SÍ* en el referéndum.

Solución:

a) Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon}\right)^2$$

donde ε representa el error de estimación, p la proporción poblacional y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$. Según el enunciado, el error de estimación es $\varepsilon \leq 0{,}04$. Como el valor de la proporción poblacional no es conocido, se considera el valor que maximiza la desviación típica, es decir, $p = 0{,}5$. Además, $z_{\alpha/2} = 2{,}58$ puesto que debe cumplir que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}99$ o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}995$.
Con lo cual

$$n \geq \left(2{,}58\frac{\sqrt{0{,}5(1-0{,}5)}}{0{,}04}\right)^2 = 1040{,}06.$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 1041 votantes.

b) Si representamos por p la proporción poblacional de votantes del *SÍ* y por $\hat{p}$ la proporción de votantes del *SÍ* de los $n = 500$ en la muestra, se tiene que p es desconocido y $\hat{p} = 100/500 = 0{,}2$. El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde

- $\hat{p}$ representa la proporción muestral, en este caso $\hat{p} = 0{,}2$,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 500$ y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}99$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$, que ya habíamos visto en el apartado anterior que era $z_{\alpha/2} = 2{,}58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de votantes del *SÍ*, al 99 % de confianza es:

$$\left(0{,}2 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{500}}, 0{,}2 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}2(1-0{,}2)}{500}}\right) = (0{,}154, 0{,}246),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que el verdadero porcentaje de personas que votarán *SÍ* está entre el 15,4 % y el 24,6 %.

4B. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.*

a) **[1,5 punto]** Si se toma una muestra aleatoria de 600 usuarios y se obtiene que el tiempo medio de renovación de sus teléfonos fue de 1,8 años, construye a partir de dicha muestra un intervalo de confianza para el tiempo medio de renovación, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio de renovación a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,03 años y un nivel de confianza del 90 %?

Solución: Si denotamos por X la v.a. «tiempo de renovación en años», sabemos que dicha variable sigue aproximadamente una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 0{,}4$ años, es decir, $X \to N(\mu, 0{,}4)$.

a) Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 600$ para la cual se obtiene una media muestral $\bar{x} = 1{,}8$ años. El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde:

- $\bar{x}$ representa la media muestral, en este caso $\bar{x} = 1{,}8$,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 600$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 0{,}4$ y
- $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0{,}9$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$, o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el tiempo de renovación medio, al 90 % de confianza es:

$$\left(1{,}8 - 1{,}64\frac{0{,}4}{\sqrt{600}}, 1{,}8 + 1{,}64\frac{0{,}4}{\sqrt{600}}\right) = (1{,}77; 1{,}83),$$

es decir, tenemos una confianza del 90 % de que el tiempo de renovación medio de ese tipo de teléfono está entre 1,77 y 1,83 años.

b) Una vez fijados el error máximo de estimación ε y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para conseguir estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

Así pues, puesto que $\varepsilon \leq 0{,}03$ y $1-\alpha = 0{,}9$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$, se tiene que

$$n \geq \left(1{,}64\frac{0{,}4}{0{,}03}\right)^2 = 478{,}15,$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 479 usuarios.

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$ y $F(2{,}58) = 0{,}995$.
