# MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

## OPCIÓN A

---

**1.** Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & (a-1)y & + & az & = & 2 \\ -x & & & + & z & = & 2 \end{array}\right.$

**a)** Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$. (1.5 puntos)
**b)** Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$. (1 punto)

---

Simplificando el sistema con el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a-1 & a & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\equiv}{\overset{F_2=F_2-F_1}{\scriptstyle F_3=F_3+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \end{array}\right) \underset{\equiv}{F_2 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & a-2 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

$$\underset{\equiv}{F_3 = F_3 - (a-2)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & -(a-2)\,(a+1) & -(a-2)(a+3) \end{array}\right)$$

**a)** • Si $\mathbf{a \neq 2}$ y $\mathbf{a \neq -1}$ la matriz del sistema y la ampliada tienen **rango** 3, igual al número de incógnitas: **sistema compatible determinado**

• Si $\mathbf{a = 2}$ la matriz del sistema y la ampliada tienen **rango** 2, menor que el número de incógnitas: **sistema compatible indeterminado**

• Si $\mathbf{a = -1}$ la matriz del sistema tiene **rango** 2 y la ampliada 3: **sistema incompatible**

**b)** Para $a = 2$ el sistema se reduce a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = z - 2 \\ y = 4 - 3z \end{array}\right.$$

$$(x, y, z) = (\lambda - 2, 4 - 3\lambda, \lambda) = (-2, 4, 0) + (\lambda, -3\lambda, \lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

---

**2.** Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

**a)** Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
**b)** Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
**c)** Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

---

**a)** Salvo en el punto $\boldsymbol{x = -1}$ la función existe y es continua y derivable. Veamos sus límites laterales:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{e^{-x}}{x+1} = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{e^{-x}}{x+1} = -\infty$$

La recta $\boldsymbol{x = -1}$ es una **asíntota vertical**.

• Asíntotas horizontales. Calculamos los límites aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{1}=-\infty\qquad\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=\frac{0}{\infty}=0$$

La recta $\boldsymbol{y=0}$ es una **asíntota horizontal**.

• Asíntotas oblicuas. Solo es necesario mirar cuando $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x(x+1)}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{2x+1}\quad\Longrightarrow\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{2}=+\infty$$

**no hay asíntotas oblicuas**.

**b)** La derivada de la función es

$$f'(x)\ =\ \frac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}$$

con punto crítico $x=-2$ que divide los intervalos de crecimiento y decrecimiento en:

$$x<-2\quad f'(x)>0\quad \textbf{creciente}\qquad x>-2\quad (x\neq-1)\quad f'(x)>0\quad\textbf{decreciente}$$

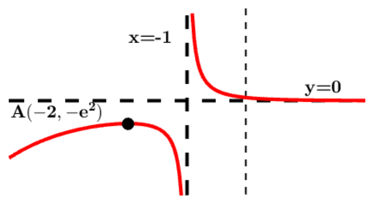
$$\Longrightarrow\quad \boldsymbol{A(-2,-e^2)}\quad \textbf{máximo}$$

**c)** Para completar la gráfica estudiamos su derivada segunda

$$f''(x)\ =\ \frac{e^{-x}(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}$$

El polinomio $x^2+4x+5>0$ no tiene raíces reales, luego no existen puntos de inflexión. Y los intervalos de convexidad-concavidad serán:

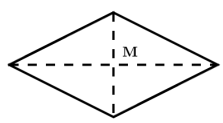
$$x<-1\qquad f''(x)<0\qquad \text{cóncava}\qquad\qquad x>-1\qquad f''(x)>0\qquad\text{convexa}$$




**3.** Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi:\ z=0$.

**a)** Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta $r$ a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo $C$ y $D$. (1.5 puntos)

**b)** Determina dichos vértices $C$ y $D$ sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio $M$. (1 punto)




Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

**a)** Un vector director $\vec{v}_r$ debe ser perpendicular al vector normal del plano $\pi$, $\vec{n} = (0,0,1)$ y al vector que une los puntos $A$ y $B$, $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} \times \vec{n} = (2,2,0) \equiv (1,1,0)$$

Un punto de la recta es el punto medio de $A$ y $B$

$$M = \frac{A+B}{2} = (2,2,0)$$

Y la ecuación de $r$

$$r \;:\; (x,y,z) = (2,2,0) + k(1,1,0) \quad k \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right.$$

**b)** $C$ y $D$ pertenecen a $r$ y se pueden expresar en función del punto $M$

$$C = M + k\vec{v}_r = (2,2,0) + k(1,1,0) \qquad\qquad D = M - k\vec{v}_r = (2,2,0) - k(1,1,0)$$

para algún valor $k \in \mathbb{R}$.

$$d(C,M) = d(D,M) = \sqrt{2k^2} = \sqrt{2}\,|k|$$

Como nos dice que esa distancia es $\sqrt{2}$, se tiene

$$|k| = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad k = \pm 1$$

$$C = (2,2,0) + 1(1,1,0) = (3,3,0) \qquad\qquad D = (2,2,0) - 1(1,1,0) = (1,1,0)$$

---

**4.** Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

| | Lisas | Dibujos | Rayas |
|---|---|---|---|
| Camisetas | 10 | 5 | 10 |
| Faldas | 5 | 15 | 5 |

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

**a)** Las dos sean de rayas. (0.75 puntos)
**b)** Las dos sean del mismo tipo. (1 punto)
**c)** Al menos una de ellas no sea de rayas. (0.75 puntos)

---

Según la tabla tendremos que el número total de camisetas es $C = 25$ y el de faldas $F = 25$. Se denotará por $CL, CD, CR$ los sucesos camiseta lisa, dibujos o rayas respectivamente. De forma similar denotaremos por $FL, FD, FR$ los sucesos referentes a las faldas.

Se tiene en cuenta en el ejercicio que los sucesos de extraer una prenda de cada cajón son independientes.

**a)** Llamando $RR$ el suceso que las dos prendas sean de rayas, se tendrá

$$P(RR) = P(CR \cap FR) = P(CR) \cdot P(FR) = \frac{10}{25}\frac{5}{25} = \mathbf{\frac{2}{25} = 0.08}$$

**b)** Sea $MT$ el suceso que las dos sean del mismo tipo. Esto ocurre cuando

$$MT = LL \cup DD \cup RR$$

con $LL$ y $DD$ los sucesos sacar dos prendas lisas o dos de dibujos respectivamente. Sucesos incompatibles entre sí.

$$P(MT) = P(LL \cup DD \cup RR) = P(LL) + P(DD) + P(RR) =$$
$$= \frac{10}{25}\frac{5}{25} + \frac{5}{25}\frac{15}{25} + \frac{10}{25}\frac{5}{25} = \mathbf{\frac{7}{25} = 0.28}$$

**c)** El suceso de que al menos una de ellas no sea de rayas es el suceso contrario a que las dos sean de rayas, $\overline{RR}$

$$P(\overline{RR}) = 1 - P(RR) = \mathbf{\frac{23}{25} = 0.92}$$

# OPCIÓN B

**1.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

**a)** Estudia para qué valores de $x$ se cumple $A^3 - I = O$ ($I$ matriz identidad y $O$ matriz nula). (1 punto)

**b)** Calcula $A^{12}$ para los valores de $x$ que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)

**c)** Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de $A$. (0.75 puntos)

---

**a)** Calculamos

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2\,x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2\,x & -3\,x^2 \\ -x^2 & 1 & 2\,x \\ -2\,x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$A^3 - I = O \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^3 & -2\,x & -3\,x^2 \\ -x^2 & 0 & 2\,x \\ -2\,x & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x = 0}$$

**b)** Para los valores que cumplen la condición se tiene $\quad A^3 - I = O \quad \Longleftrightarrow \quad A^3 = I$

$$A^{12} = (A^3)^4 = I^4 = I$$

**c)** Para $x = 0$

$$A^3 = I \quad \Longleftrightarrow \quad A.A^2 = I \quad \Longrightarrow \quad \text{existe la inversa y} \quad A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

**2.** Dadas las curvas $\quad y = x^2/2, \quad y = 4/x.$

**a)** Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)

**b)** Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1,3]$. (1 punto)

**c)** Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1,3]$. (1 punto)

---

**a)** Los puntos de corte serán las soluciones de

$$x^2/2 = 4/x \quad \Longrightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Luego el punto de corte es $\quad (\mathbf{2}, \mathbf{2})$

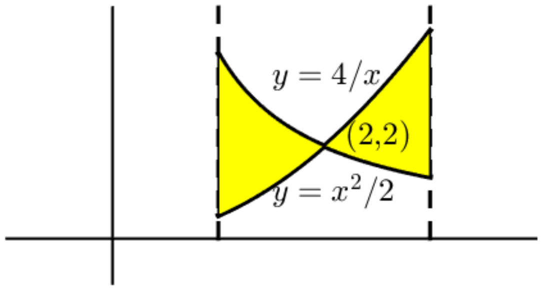
**b)** La curva $y = x^2/2$ en el intervalo $[1,3]$ va de los puntos

$$(1, y(1)) = (1, 1/2) \quad \text{a} \quad (3, y(3)) = (3, 9/2)$$

Además $\quad y'(x) = x > 0, \quad y''(x) = 1 > 0$ en $[1,3]$, luego creciente y convexa.
La curva $y = 4/x$ en el intervalo $[1,3]$ va de los puntos

$$(1, y(1)) = (1, 4) \quad \text{a} \quad (3, y(3)) = (3, 4/3)$$

Además $\quad y'(x) = \dfrac{-4}{x^2} < 0, \quad y''(x) = \dfrac{8}{x^3} > 0$ en $[1,3]$, luego decreciente y convexa. Sus gráficas serán




**c)** Para calcular el área se debe dividir el intervalo $[1,3]$ en dos: $[1,2]$ y $[2,3]$

$$\text{Área } = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2}\right)\,dx + \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}\right)\,dx = \left(4\ln|x| - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{x^3}{6} - 4\ln|x|\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= \left(4\ln(2) - \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{19}{6} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 4\ln(2) - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = 3.1507\ u^2$$

---

**3.** Dados el plano $\pi : x + y = 1$ y la recta $r$ que pasa por el punto $A(1,1,1)$ con vector director $\vec{v}_r = (0,1,1)$. Calcula:

**a)** El punto $P$ intersección del plano $\pi$ y de la recta $r$. (1.25 puntos)

**b)** El punto $A'$ simétrico de $A$ respecto al plano $\pi$. (1.25 puntos)

---

**a)** Un punto $Q(x,y,z)$ de la recta se expresa por

$$Q = A + k\vec{v}_r \qquad k \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y,z) = (1,1,1) + k(0,1,1) = (1, 1+k, 1+k) \qquad k \in \mathbb{R}$$

Si además pertenece a $\pi : x + y = 1$

$$1 + (1 + k) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad k = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{P(1,0,0)}$$

**b)** El punto medio $M$ entre $A$ y $A'$ pertenece al plano $\pi$ y a la recta $s$ que pasa por $A$ y tiene de vector director el normal al plano $\pi$, $\vec{n} = (1,1,0)$

$$s : Q = A + k\vec{n} \qquad k \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y,z) = (1,1,1) + k(1,1,0) = (1+k, 1+k, 1) \qquad k \in \mathbb{R}$$

Si además $M \in \pi$

$$2 + 2k = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad k = -1/2 \qquad \Longrightarrow \qquad M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Se tiene que

$$A' = M - \overrightarrow{MA} = (1/2, 1/2, 1) - (1/2, 1/2, 0) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$$

---

**4.** Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

**a)** La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)

**b)** La calificación que sólo superan o igualan el 20 % de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(-0.8416) = 0.2$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(0.4) = 0.6554$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$

---

**a)** Sea $X$ la variable aleatoria de las *calificaciones del examen* que sigue una distribución normal $N(20, 10)$. Nos piden

$$P(15 \leq X \leq 25) \; = \; P(X \leq 25) \; - \; P(X \leq 15)$$

si tipificamos cada una de las probabilidades a la normal $N(0,1)$

$$P(X \leq 25) = P\left(Z \leq \frac{25-20}{10} = 0.5\right) = F(0.5) = 0.6915$$

$$P(X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{15-20}{10} = -0.5\right) = 1 - P\left(Z \leq 0.5\right) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

$$P(15 \leq X \leq 25) \; = \; P(X \leq 25) - P(X \leq 15) \; = \; 0.6915 - 0.3085 \; = \; \mathbf{0.3829} \; \equiv \; \mathbf{38.29}\,\%$$

**b)** La calificación $C$ que nos piden verifica

$$P(X \geq C) = 0.2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 - P(X \leq C) = 0.2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P(X \leq C) = 0.8$$

Dicha probabilidad se corresponde en la normal tipificada al valor $F(0.8416) = 0.8 \Longrightarrow CT = 0.8416$, por tanto

$$CT \; = \; \frac{C - \mu}{\sigma} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0.8416 \; = \; \frac{C - 20}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{C = 28.4162}$$