# MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

---

**Bloque 1.A** Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rcrl} x & + & y & = a \\ (2-a)x & + & 2y & = 1 \\ ax & & & = a \end{array}\right. \qquad a \in \mathbb{R}$

**a)** Estudia su compatibilidad según los valores de $a$. (1.5 puntos)

**b)** Resuélvelo cuando sea posible. (1 punto)

---

**a)** Aplicamos la técnica de Gauss a la matriz ampliada del sistema $A^* = (A\,|\,b)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2-a & 2 & 1 \\ a & 0 & a \end{array}\right) \underset{\equiv}{\substack{F_2 = F_2-(2-a)F_1 \\ F_3 = F_3 - aF_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & a & (a-1)^2 \\ 0 & -a & -a\,(a-1) \end{array}\right) \underset{\equiv}{F_3 = F_3 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & a & (a-1)^2 \\ 0 & 0 & 1-a \end{array}\right)$$

Los valores críticos son $a = 0$ y $a = 1$.

$a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$ **rango** $A = 2 <$ **rango** $A^* = 3$ Sist. Incompatible

$a = 0$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ **rango** $A = 1 <$ **rango** $A^* = 2$ Sist. Incompatible

$a = 1$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **rango** $A =$ **rango** $A^* = 2 =$ **nº incóg.** Sist. Compatible Determinado

**b)** Con $a = 1$ el sistema se reduce

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 1 \\ & & y & = 0 \end{array}\right.$$

con solución

$$\boldsymbol{x = 1} \qquad \boldsymbol{y = 0}$$

---

**Bloque 1.B** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$

**a)** Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz. (1.5 puntos)

**b)** Para $\boldsymbol{x} = 1$, calcula su inversa. (1 punto)

---

**a)**

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{vmatrix} \overset{C_1 = C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & x+1 & x-2 \\ 0 & x & 2-x \\ 1 & x-1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} x+1 & x-2 \\ x & 2-x \end{vmatrix} \overset{F_1 = F_1 + F_2}{=} \begin{vmatrix} 2x+1 & 0 \\ x & 2-x \end{vmatrix} = \mathbf{(2x+1)(2-x) = -2x^2 + 3x + 2}$$

las raíces de este polinomio son: $\boldsymbol{x_1 = -\frac{1}{2}}$ y $\boldsymbol{x_2 = 2}$. Luego para todos los valores distintos de estos dos la matriz posee inversa.

**b)** Para $x = 1$ se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \left(\text{Adj}(A)\right)^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/3} & \mathbf{-2/3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

---

**Bloque 2.A** Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$

**a)** Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1.25 puntos)

**b)** Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0.75 puntos)

**c)** Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

---

**a)** Salvo en el punto $\boldsymbol{x = 0}$ la función existe y es continua y derivable. Veamos sus límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x^3 + 1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{2x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$

La recta $\boldsymbol{x = 0}$ es una **asíntota vertical**.

- Asíntotas horizontales. Calculamos los límites aplicando la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x \to -\infty} \frac{12x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{12x}{2} = +\infty$$

No hay **asíntotas horizontales**.

- Asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+1}{x^3} = 2$$

Por cociente de polinomios del mismo grado.

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Luego la recta $\boldsymbol{y = 2x}$ es una **asíntota oblicua**.

**b)** La derivada de la función es

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{2\,(x^3-1)}{x^3}}$$

con punto crítico $\boldsymbol{x = 1.}$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento serán:

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{x < 0} & \boldsymbol{f'(x) > 0} & \textbf{creciente} \\ \boldsymbol{0 < x < 1} & \boldsymbol{f'(x) < 0} & \textbf{decreciente} \\ \boldsymbol{x > 1} & \boldsymbol{f'(x) > 0} & \textbf{creciente} \end{array}$$

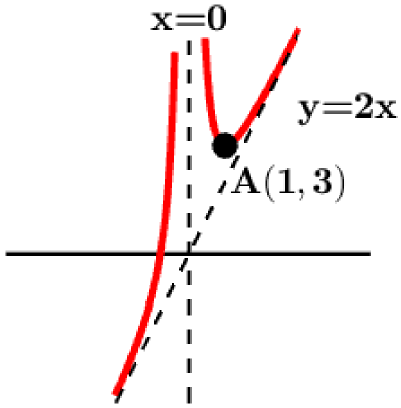
$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{A(1,3)} \quad \textbf{mínimo relativo}$$

**c)** Para completar la gráfica estudiamos su derivada segunda

$$\boldsymbol{f''(x) = \frac{6}{x^4}}$$

Luego no existen puntos de inflexión y la función será **convexa** pues $\boldsymbol{x \neq 0}$ $\boldsymbol{f''(x) > 0}$

Uniendo todo nos da




---

**Bloque 2.B** Calcula:

**a)** $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\,e^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2}$ (1.25 puntos)

**b)** Una primitiva de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0,3)$. (1.25 puntos)

---

**a)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\,e^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (x+1)e^x}{2\,x + 2\operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0}$$

La volvemos a aplicar

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) - (x+2)\,e^x}{2 + 2\cos(x)} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

**b)**

$$F(x) = \int \left(x\cos(x) - e^{-x}\right)dx = \int (x\cos(x))\,dx + \int \left(-e^{-x}\right)dx =$$

$$= e^{-x} + \int (x\cos(x))\,dx =$$

Aplicando la técnica de integración por partes

$$\begin{matrix} du = \cos(x)dx \\ v = x \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} u = \operatorname{sen}(x) \\ dv = dx \end{matrix}$$

$$= e^{-x} + x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\,dx = e^{-x} + x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$

Si tiene que pasar por el punto $(0,3)$

$$F(0) = 3 \iff e^{-0} + 0\operatorname{sen}(0) + \cos(0) + C = 3 \iff 2 + C = 3 \implies C = 1$$

$$\boldsymbol{F(x) = e^{-x} + x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + 1}$$

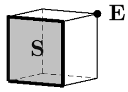
---

**Bloque 3.A** Sean $A(2,1,0)$, $B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$ tres vértices de la cara $S$ de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

**a)** El cuarto vértice $D$ de la cara $S$. (1 punto)

**b)** La ecuación del plano $\pi$ que contiene la cara opuesta de $S$. (1 punto)

**c)** ¿Cuál es el vértice de la cara $S$ adyacente a $E$? (0.5 puntos)




---

**a)** Si los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ forman un cuadrado las distancias entre vértices consecutivos deben ser iguales

$$d(A,B) = 5 \qquad d(A,C) = 5 \qquad d(B,C) = \sqrt{50}$$

Luego $A$ y $D$ son vértices opuestos del cuadrado

$$\boldsymbol{D} \;=\; A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \;=\; (2,1,0) + (3,4,0) + (0,0,5) \;=\; \mathbf{(5,5,5)}$$

**b)** El plano $\pi$ y el plano que contiene a $S$ son paralelos, es decir, tienen el mismo vector normal. Un vector normal será

$$\vec{n} \;=\; \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \;=\; (20,-15,0) \;\equiv\; (4,-3,0)$$

Por tanto, el plano $\pi$ será de la forma

$$\pi \;:\; 4x - 3y + d = 0$$

con $E \in \pi$

$$d = 20 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\pi \;:\; 4x - 3y + 20 = 0}$$

**c)** El vértice adyacente a $E$ será el que está a distancia 5 de él. Esto se alcanza en

$$d(A,E) = 5$$

luego $\boldsymbol{A}$ es el vértice adyacente.

---

**Bloque 3.B** Dados dos planos $\left\{\begin{array}{l} \pi \;:\; x + y - 2z = 3 \\ \pi' \;:\; x - z = 5 \end{array}\right.$. Sea $P$ un punto de $\pi$ cuya proyección ortogonal sobre $\pi'$ es el punto $A(5,1,0)$

**a)** Calcula las ecuaciones implícitas de la recta $r$ que une $P$ y $A$. (1.5 puntos)

**b)** Calcula el punto $P$. (1 punto)

---

**a)** Un vector director de la recta $r$ tiene que seguir la dirección de un vector normal al plano $\pi'$.

$$\vec{n}\,' = (1,0,-1)$$

$$(x,y,z) = A + k\vec{n}\,' = (5,1,0) + k(1,0,-1) \quad k \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 5 + k \\ y = 1 \\ z = -k \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} x + z = 5 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

**b)** Se tiene que $P \in r$

$$P\,(5+k, 1, -k)$$

y $P \in \pi$

$$(5+k)+1-2(-k)=3 \qquad \Longrightarrow \qquad k=-1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{P\,(4,1,1)}$$

---

**Bloque 4.A** En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

**a)** La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas. (1.25 puntos)

**b)** Sabiendo que ha aprobado, cuál es la probabilidad de que sea de la clase B. (1.25 puntos)

---

Con los datos que nos dan se pueden establecer las siguientes probabilidades:

- Las probabilidades de que un alumno elegido al azar pertenezca a una de las clases

$$P(A)=\frac{1}{2} \qquad P(B)=\frac{3}{10} \qquad P(C)=\frac{1}{5}$$

- Las probabilidades de que un alumno apruebe condicionado a pertenecer a una clase

$$P(Ap/A)=\frac{2}{5} \qquad P(Ap/B)=\frac{1}{2} \qquad P(Ap/C)=\frac{3}{4}$$

**a)** Para calcular la probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas $P(Ap)$ aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P(Ap)} &= P(Ap\cap A)+P(Ap\cap B)+P(Ap\cap C) = \\ &= P(Ap/A)P(A)+P(Ap/B)P(B)+P(Ap/C)P(C) = \frac{2}{5}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{3}{10}+\frac{3}{4}\frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

**b)** Nos piden $P(B/Ap)$. Aplicando la fórmula de Bayes

$$\boldsymbol{P(B/Ap)}=\frac{P(Ap\cap B)}{P(Ap)}=\frac{P(Ap/B)P(B)}{P(Ap)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

---

**Bloque 4.B** En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu=50$ y desviación típica $\sigma=10$. Calcula:

**a)** La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos. (1.25 puntos)

**b)** El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x)=P(Z\le x)$, $F(2)=0.9772$, $F(1)=0.8413$, $F(1.5)=0.9332$, $F(0.5)=0.6915$, $F(0.2533)=0.6$, $F(0.5244)=0.7$, $F(0.8416)=0.8$)

---

**a)** Sea $X$ la variable aleatoria de *producción de kilogramos de cada manzano* que sigue una distribución normal $N(50, 10)$. Nos piden

$$P(30 \leq X \leq 60) \;=\; P(X \leq 60) \;-\; P(X \leq 30)$$

si tipificamos cada una de las probabilidades a la normal $N(0, 1)$

$$P(X \leq 30) = P\left(Z \leq \frac{30-50}{10} = -2\right) = 1 - P\left(Z \leq 2\right) = 1 - F(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$P(X \leq 60) = P\left(Z \leq \frac{60-50}{10} = 1\right) = F(1) = 0.8413$$

$$P(30 \leq X \leq 60) \;=\; P(X \leq 60) - P(X \leq 30) \;=\; 0.8413 - 0.0228 \;=\; \mathbf{0.8185} \;\equiv\; \mathbf{81.85}\,\%$$

**b)** La cantidad de kilogramos $C$ que nos piden verifica

$$P(X \leq C) = 0.6 \qquad \Longrightarrow \qquad P\left(Z \leq CT = \frac{C-50}{10}\right) = 0.6$$

En los datos tenemos

$$F(0.2533) = P(Z \leq 0.2533) = 0.6 \qquad \Longrightarrow \qquad CT = 0.2533$$

$$0.2533 = \frac{C-50}{10} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 50 + 2.533 = \mathbf{52.533}\text{ Kg.}$$