MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

OPCIÓN A

---

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} mx & + & y & - & z & = 0 \\ 2x & + & my & & & = m \\ x & & & + & mz & = m \end{array}\right\}$ $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m. (1.25 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m = 1$. (0.75 puntos)
c) Para qué valores de m se tiene la solución $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$. (0.5 puntos)

Reordenando y simplificando el sistema ampliado con el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{rrr|r} m & 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \\ 1 & 0 & m & m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & m & m \\ m & 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 = F_2 - mF_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}}{\equiv} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & -1-m^2 & -m^2 \\ 0 & m & -2m & -m \end{array}\right)$$

$$\overset{F_3 = F_3 - mF_2}{\equiv} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & m & m \\ 0 & 1 & -1-m^2 & -m^2 \\ 0 & 0 & m^3 - m & m^3 - m \end{array}\right)$$

$$m^3 - m = 0 \quad \Longrightarrow \quad m(m-1)(m+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = 0, 1, -1$$

a) Si $m = 0, 1$, ó -1 la matriz del sistema es de **rango** 2 y el de la ampliada también: **sistema compatible indeterminado**.
Si $m \neq 0, 1$, y -1 la matriz del sistema es de **rango** 3 y el de la ampliada también: **sistema compatible determinado**.

b) Para $m = 1$ el sistema, según hemos visto, se reduce a

$$\left\{\begin{array}{rl} x + z & = 1 \\ y - 2z & = -1 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = -1 + 2z \end{array}\right.$$

$$(x, y, z) = (1 - \lambda, -1 + 2\lambda, \lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Sustituyendo $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$ en el sistema nos queda

$$\left.\begin{array}{rl} 0 + 1 - 1 & = 0 \\ 0 + m & = m \\ 0 + m & = m \end{array}\right\}$$

es decir, es una solución para cualquier valor de m.

---

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{2 + e^x}$.

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)

b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$ (1.5 puntos)

---

a) El denominador $2 + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego el dominio de definición es todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, **no hay asíntotas verticales**

Asíntotas horizontales. Calculamos los límites

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+0} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+\infty} = 0$$

Las rectas $\boldsymbol{y = 1}$, $\boldsymbol{y = 0}$ son **asíntotas horizontales**. Y, como consecuencia, **no hay asíntotas oblicuas**.

b) El cambio de variable $t = e^x$ $(t > 0)$

$$t = e^x \qquad \Longrightarrow \qquad dt = e^x dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad dx = \frac{1}{t}dt$$

nos trasforma la integral en

$$\int \frac{2}{2+e^x}\,dx = \int \frac{2}{t(2+t)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2+t}\right) dt = \int \left(\frac{1}{t}\right) dt - \int \left(\frac{1}{2+t}\right) dt =$$

$$= \ln|t| - \ln|2+t| + C = \ln\left|\frac{t}{2+t}\right| + C = \ln\left(\frac{t}{2+t}\right) + C \qquad (t > 0)$$

deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{2}{2+e^x}\,dx = \ln\left(\frac{e^x}{2+e^x}\right) + C = x - \ln(2+e^x) + C$$

---

3. Sean los planos $\pi_1 : x+y+z = 0$ y π_2. Su intersección es la recta $r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)

b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r. (1.25 puntos)

---

a) Calculemos la expresión de la recta r en forma de un punto C y un vector director $\vec{v}_r$

$$r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff r : \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,-1) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} C\ (0,0,0) \\ \vec{v}_r = (1,0,-1) \end{array}$$

El plano π_2 se puede construir a partir del punto C (o A) y los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\vec{v}_r$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x - 2y + z = 0}$$

b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 es del tipo

$$x + y + z + d = 0$$

y, como la recta r es paralela al plano π_1', se tiene que

$$d(r, \pi_1') = d(P, \pi_1') \qquad \forall P \in r$$

En particular podemos coger C

$$\sqrt{3} \;=\; d(C, \pi_1') = \frac{|d|}{\sqrt{1+1+1}} \quad \Longrightarrow \quad |d| = 3 \quad \Longrightarrow \quad d = \pm 3$$

$$\pi_1' \;:\; x + y + z \pm 3 = 0$$

---

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el $10\,\%$ de la veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos? (1.25 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos? (1.25 puntos)

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

Estamos ante un suceso que sigue una distribución binomial $B(20, 0.1)$ con $n = 20$, $p = 0.1$ y $q = 0.9$.

a) Nos piden

$$P(X=5) = \binom{20}{5}(0.1)^5 \cdot (0.9)^{15} \;=\; 15504\,(0.1)^5 \cdot (0.9)^{15} \;=\; 0.0319$$

b) Nos piden

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \binom{20}{0}(0.1)^0 \cdot (0.9)^{20} + \binom{20}{1}(0.1)^1 \cdot (0.9)^{19} + \binom{20}{2}(0.1)^2 \cdot (0.9)^{18} \;=$$

$$= (0.1)^0 \cdot (0.9)^{20} + 20(0.1)^1 \cdot (0.9)^{19} + 190(0.1)^2 \cdot (0.9)^{18} \;=\; 0.6769$$

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes. (1 punto)

$$A \cdot A\,, \qquad A \cdot B\,, \qquad A \cdot B \cdot C\,, \qquad C \cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior. (1.5 puntos)

---

a)

$$A \cdot A \implies (3, \boxed{3}) \times (\boxed{3}, 3) = (3,3)$$

$$A \cdot B \implies (3, \boxed{3}) \times (\boxed{3}, 2) = (3,2)$$

$$A \cdot B \cdot C \implies (3, \boxed{3}) \times (\boxed{3}, 2) = (3,2) \implies (3, \boxed{2}) \times (\boxed{3}, 1) \quad \textbf{No}$$

$$C \cdot D \implies (3, \boxed{1}) \times (\boxed{1}, 3) = (3,3)$$

b) Según lo visto, las matrices cuadradas son $A \cdot A$ y $C \cdot D$

$$A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A^2| = 1 \qquad \left(\mathrm{Adj}(A^2)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \left(\mathrm{Adj}(A^2)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |C \cdot D| = 0 \qquad \textbf{no posee inversa}$$

---

2. Dada la curva $y = \dfrac{1}{3 + x^2}$.

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x. (1 punto)
b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

---

a) La función $m(x)$ es precisamente la derivada de $y(x)$

$$m(x) = y'(x) = -\frac{2\,x}{\left(x^2 + 3\right)^2}$$

b) Buscamos máximos de $m(x)$

$$m'(x) = \frac{6\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+3\right)^3}$$

$$m'(x)=0 \iff x=\pm 1$$

Para ver el tipo de punto crítico miramos los intervalos de crecimiento de $m(x)$

$x<-1$	$m'(x)>0$	**creciente**
$-1<x<1$	$m'(x)<0$	**decreciente**
$x>1$	$m'(x)>0$	**creciente**

Luego

$$x=-1 \qquad \textbf{máximo}$$

que es absoluto pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} m(x)=0$ y $m(-1)>0$.

---

3. Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano $\boldsymbol{\pi}$ que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)

b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

---

a) El plano π pasará por le punto medio M del segmento AB

$$M = A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1,1,1)+\frac{1}{2}(0,-2,-2) \qquad \Longrightarrow \qquad M(1,0,0)$$

Por otro lado, un vector normal al plano será

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(0,-2,-2)$$

Es decir, una ecuación del plano es

$$-2y-2z+d=0$$

Si $M\in\pi \implies d=0$, la ecuación del plano es

$$\boldsymbol{\pi : y+z=0}$$

b) Los puntos verifican que

$$C=A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad C\left(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

$$D=A+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad D\left(\mathbf{1},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

---

4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10 % de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20 % de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)

b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)

c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

Denotamos por PA y PF, a que Pedro acierte o falle con $P(PA)=0.1$, $P(PF)=0.9$. E igualmente LA y LF, a que Luis acierte o falle con $P(LA)=0.2$, $P(LF)=0.8$.

a) Las dos tiradas son sucesos independientes entre sí. La probabilidad de que Luis acierte las dos veces LAA será:

$$P(LAA) = P(LA) \cdot P(LA) = (0.2) \cdot (0.2) = \mathbf{0.04 = \frac{1}{25}}$$

b) La probabilidad de que Pedro acierte una vez PAF será:

$$P(PAF) = 2P(PA) \cdot P(PF) = 2(0.1) \cdot (0.9) = \mathbf{0.18 = \frac{9}{50}}$$

pues hay que tener en cuenta el orden de los aciertos y fallos.

c) Que ganen 600€ entre los dos sólo ocurre cuando Luis acierta las dos veces y Pedro una sola vez

$$P(600) = P(PAF \cap LAA) = P(PAF) \cdot P(LAA) = \mathbf{0.0072}$$

pues las tiradas de Pedro y Luis son independientes entre sí.