1. D'una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = x^3 - 4x$.

***a*)** Determineu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $y = f(x)$.

[1 punt]

***b*)** Determineu les abscisses dels seus extrems relatius i classifiqueu-los.

[1 punt]

Solució:

a) Resolem: $f'(x) > 0$, d'on s'obté que la funció creix si x pertany als intervals $(-2,0)$ i $(2,+\infty)$ i $f'(x) < 0$, d'on obtenim que la funció decreix en els intervals $(-\infty,-2)$ i $(0,2)$.

b) La funció té un màxim relatiu en el punt d'abscissa $x = 0$ i dos mínims relatius en els punts d'abscissa $x = 2$ i $x = -2$. Sabem de quin tipus d'extrems relatius es tracta pels intervals de creixement i de decreixement de l'apartat anterior.

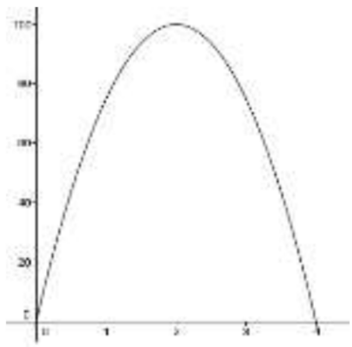
2. Des d'una barca es dispara una bengala de salvament marítim que s'apaga al cap de 4 minuts. En aquest interval de temps, es comprova que la intensitat lumínica de la bengala en funció del temps, mesurada en percentatges del 0 % al 100 %, queda perfectament descrita per l'expressió $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t)$, en què el temps t varia entre 0 i 4 minuts.

***a*)** Calculeu per a quin valor de t el percentatge d'intensitat lumínica serà màxim.
[1 punt]

***b*)** Si des de la costa la bengala només és visible quan la seva intensitat lumínica és superior al 75 %, quin és l'interval de temps en què serà visible des de la costa i, per tant, serà més factible el salvament?
[1 punt]

Solució:

a) El percentatge d'intensitat lumínica ve donat per la funció $L(t) = 25t(4-t)$, amb $0 \le t \le 4$, que és una funció quadràtica que té per gràfica una paràbola:

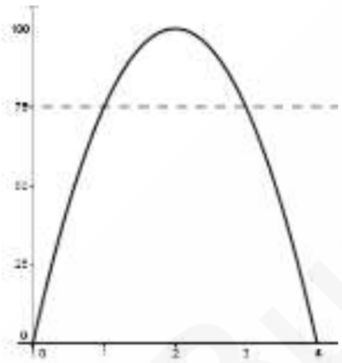


Cal, doncs, calcular el màxim d'aquesta funció; ho podrem fer calculant el vèrtex de la paràbola, o bé per derivació:

$$L'(t) = 100 - 50t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ minuts.}$$

Com que $L'(1) > 0$ i $L'(3) < 0$ es tracta efectivament d'un màxim. Per tant, després de 2 minuts del llançament, la intensitat serà màxima.

b) Hem de resoldre la inequació $100t - 25t^2 > 75$.



Resolem l'equació de segon grau associada:

$$-25t^2 + 100t - 75 = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$, que són punts de tall de la paràbola amb la recta $y = 75$.

6. Considereu la funció $f(x) = -x^2 + bx + c$ amb b i c nombres reals.
   a. Trobeu b i c de manera que la gràfica de la funció passi pel punt $(-1,0)$ i tingui un extrem local en el punt d'abscissa $x = 3$. Raoneu de quin tipus d'extrem relatiu es tracta. *[1 punt]*
   b. Per al cas $b = 3$ i $c = 2$, trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica que és paral·lela a la recta $y = 5x - 2$. *[1 punt]*

Solució:

a) Calculem la primera derivada $f'(x) = -2x + b$ i plantegem el sistema d'equacions que permet calcular a i b, imposant que passi pel punt $(-1,0)$ i que la derivada en $x = 3$ s'anul·la.

$$\left.\begin{array}{l} -1-b+c=0 \\ -2\cdot 3+b=0 \end{array}\right\} \text{i per tant, } b=6 \text{ i } c=7.$$

Si estudiem on és positiva i on és negativa la funció $f'(x)$, observem que $f'(x) > 0$ per a $x < 3$ i que $f'(x) < 0$ per a $x > 3$. Per tant es tracta d'un màxim. Alternativament poden argumentar que es tracta d'un màxim geomètricament, tenint en compte que es tracta d'una paràbola amb el coeficient del terme quadràtic negatiu.

b) En aquest cas la derivada és $f'(x) = -2x + b = -2x + 3$. Cal trobar el valor de x tal que $f'(x) = 5$, per tant $-2x + 3 = 5$, i obtenim $x = -1$. Per al punt d'abscissa $x = -1$ tenim que l'ordenada és $y = -1 - 3 + 2 = -2$. Per tant, l'equació de la recta tangent és $y + 2 = 5(x+1)$, és a dir, $y = 5x + 3$.

4. L'any 2008 la nòmina d'un treballador era de 1000 euros. L'any 2009, l'empresa on treballava va decidir rebaixar-li la nòmina en un 10%. L'any 2010, amb la intenció de recuperar la situació econòmica del treballador, l'empresa va decidir incrementar-li la nòmina en un 10%.
    a. Calculeu la nòmina del treballador que va resultar de la baixada del 10% de l'any 2009. *[0,5 punts]*
    b. Calculeu la nòmina del treballador que va resultar de la pujada del 10% de l'any 2010. *[0,5 punts]*
    c. Si una nòmina de 1.000 euros ha patit una rebaixa d'un 10%, quin increment s'ha d'aplicar a la nova nòmina per recuperar el sou de 1000 euros? *[1 punt]*

Solució:

a) Calculem la nòmina del treballador que va resultar de la baixada del 10% de l'any 2009.

$$1000 - \frac{10}{100} \cdot 1000 = 900 \text{ euros}$$

b) Calculem la nòmina del treballador que va resultar de la pujada del 10% de l'any 2010.

$$900 + \frac{10}{100} \cdot 900 = 990 \text{ euros}$$

c) Si una nòmina de 1000 euros pateix una rebaixa d'un 10%, tindrem una nova nòmina de 900 euros. Si ara l'incrementem en un y % tindrem

$$900 + \frac{y}{100} \cdot 900$$

Imposem ara que aquest valor sigui 1000 i aïllem y

$$900 + \frac{y}{100} \cdot 900 = 1000$$

$$9\,y = 100$$

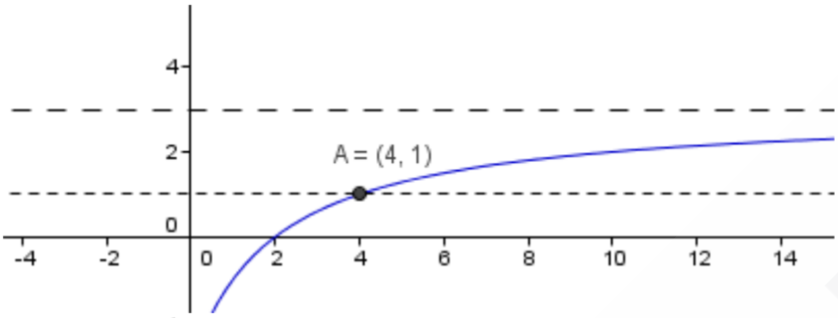
$$y = \frac{100}{9}.$$

Per tant, si una nòmina de 1000 euros pateix una rebaixa d'un 10% cal un increment del $\frac{100}{9}$ %, és a dir d'un 11,11%, per recuperar la nòmina de 1000 euros.

5. Les pèrdues o els beneficis d'una empresa venen donats per la funció $f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$, en què $f(t)$ s'expressa en centenars de milers d'euros, un cop transcorreguts t anys des de l'inici del 2010.
   a. Feu un esbós de la gràfica de la funció $f(t)$ per a $t > 0$, calculant els intervals de creixement, els talls amb els eixos i les asímptotes. *[1 punt]*
   b. A l'inici de l'any 2010 quants euros perdia o guanyava l'empresa? Quins anys va tenir pèrdues l'empesa i a partir de quin any en va deixar de tenir? *[0,5 punts]*
   c. A partir de quin any els guanys de l'empresa van ser més grans o iguals a un centenar de milers d'euros? Es poden superar els 3 centenars de milers d'euros de beneficis? Raoneu les respostes. *[0,5 punts]*

Solució:

a) Calculem la derivada de la funció $f'(t) = \frac{12}{(t+2)^2}$. Com que és positiva per a tot t la funció sempre és creixent. Trobem els talls amb els eixos (0,-3) i (2,0). Finalment tenim una asímptota horitzontal en $y = 3$.



b) $f(0) = \frac{-6}{2}$=-3. A l'inici de l'any 2010 l'empresa perdia 300.000 euros.
Per estudiar quins anys va tenir pèrdues i quan va deixar de tenir-les, resolem la inequació: $f(t) \geq 0 \rightarrow 3t - 6 \geq 0 \rightarrow t \geq 2$. A partir del 2012 l'empresa va començar a no tenir pèrdues, fins aleshores va tenir pèrdues.
c) Caldrà resoldre $f(t) \geq 1 \rightarrow 3t - 6 \geq t + 2 \rightarrow t \geq 4$. A partir del 2014 els guanys van superar o igualar els 100.000 euros i $f(t) \geq 3 \rightarrow 3t - 6 \geq 3t + 6 \rightarrow -6 \geq 6$ No pot ser! Els guanys de l'empresa mai superaran els 300.000 euros.