3. Considereu les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$, en què m i n són dos nombres reals.

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.
[1 punt]

b) Determineu m i n de manera que les matrius $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ commutin, és a dir, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$.
[1 punt]

Solució:

a) Tenim $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ i $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, per tant

$$(A - B) \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$$

D'altra banda $A^2 = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$ i $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'on es dedueix que es verifica la igualtat demanada.

Alternativament, podem desenvolupar $(A - B) \cdot (A + B)$ i argumentar que per comprovar que es compleix la igualtat n'hi ha prou de veure que A i B commuten:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$,

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Calculem els dos productes:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n & m \end{pmatrix}$$

Per tant commuten si i només si $m = -1$ i $n = 1$.

4. Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes.
   a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment en cada pila? Raoneu la resposta. *[1 punt]*
   b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila si sabem que en total hi ha 51 monedes. [1 punt]

Solució:

Anomenem x la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la primera pila, y la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la segona pila i, finalment, z la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la tercera pila.
Un cop fet el traspàs de monedes descrit en l'enunciat, el contingut de cada pila és:
Primera pila: $x + 10$ monedes.
Segona pila: $y + 2$ monedes.
Tercera pila: $z - 12$ monedes.

a) Sabem que la quantitat de monedes de cada pila és la mateixa, per tant:

$$\begin{cases} x + 10 = y + 2 \\ x + 10 = z - 12 \end{cases}$$

Ordenant el sistema tenim:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \end{cases}$$

I resolent-lo pel mètode de Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -22 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \end{array}\right)$$

Es tracta, per tant, d'un sistema compatible indeterminat. La solució ve expressada en funció d'un paràmetre. Prenent z com a paràmetre i aïllant adequadament, la solució és:

$$\begin{cases} x = z - 22 \\ y = z - 14 \\ z \end{cases}$$

Per tant, no podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment.

b) Si a més sabem que en total hi ha 51 monedes, aleshores tenim una equació més:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \\ x + y + z = 51 \end{cases}$$

Resolent per Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -22 \\ 1 & 1 & 1 & 51 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 2 & 1 & 59 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 87 \end{array}\right)$$

De la tercera equació, $3z = 87$, és a dir, $z = 29$.
De la segona equació, $y - z = -14$, és a dir, $y = 15$.
De la primera equació, $x - y = -8$, és a dir, $x = 7$.
Per tant, inicialment en la primera pila hi havia 7 monedes, en la segona pila hi havia 15 monedes i en la tercera pila hi havia 29 monedes.

Alternativament, com que les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes, a cada una n'hi haurà 17 i poden obtenir la solució resolent

$$\begin{cases} x + 10 = 17 \\ y + 2 = 17 \\ z - 12 = 17 \end{cases}$$

2. Una empresa ofereix 225 euros per repartir tot un paquet de fulls de propaganda. En Roc, en Martí i en Guiu decideixen fer la feina entre tots tres: en Martí reparteix un 20 % del total; en Guiu reparteix 100 fulls més que en Roc, i entre en Roc i en Martí en reparteixen 850.

***a*)** Calculeu el nombre de fulls que ha repartit cadascun d'ells.
[1 punt]

***b*)** Un cop acabada la feina, decideixen dividir els guanys entre tots tres, proporcionalment als fulls repartits. Segons aquest criteri, quants diners cobrarà en Guiu, quants en cobrarà en Roc i quants en Martí?
[1 punt]

Solució:

a) Suposem que x, y i z són respectivament el nombre de fulls repartits per en Roc, en Martí i en Guiu.
Les dades del problema es tradueixen algebraicament en el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}2\cdot(x+y+z) \\ z = x+100 \\ x+y = 850 \end{array}\right\}$$

Ara resolem per Gauss, arreglant i simplificant les equacions:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2x - 0{,}8y + 0{,}2z = 0 \\ x \quad - \quad z = -100 \\ x \quad + \quad y \quad = 850 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 4y + z = 0 \\ x \quad - \; z = -100 \\ x + y \quad = 850 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -100 \\ 1 & 1 & 0 & 850 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \rightarrow f_2 - f_1 \\ \rightarrow f_3 - f_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -100 \\ 0 & 5 & -1 & 850 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow 4f_3 - 5f_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -100 \\ 0 & 0 & 6 & 3900 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 4y + z = 0 \\ 4y - 2z = -100 \\ 6z = 3900 \end{array}\right\}$$

I obtenim $z = 650 \quad y = 300 \quad x = 550$
Per tant, en Roc va repartir 550 fulls, en Martí en va repartir 300 i en Guiu, 650.

b) En total han repartit $x + y + z = 550 + 300 + 650 = 1500$ fulls. L'empresa ha pagat per la feina 225 euros.

Calculem a quant es paga el full repartit: $225€ : 1500 \; fulls = 0{,}15 \; €/full$

Per tant, en Roc cobrarà 550 · 0,15 = 82,5 euros, en Martí cobrarà 300 · 0,15 = 45 euros i, finalment, en Guiu 650 · 0,15 = 97,5 euros.

6. Considereu les matrius: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a. Calculeu el valor del paràmetre a per al qual es compleix que $A \cdot B = B \cdot A$. *[1 punt]*
   b. Per al valor $a = 2$, trobeu una matriu X, tal que $A \cdot X \cdot A = B$. *[1 punt]*

Solució:

a) Calculem els productes $A \cdot B$ i $B \cdot A$:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -a+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

per tal que es compleixi la igualtat cal que $a = 1$.

b) Aïllant obtenim que $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$,

$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i fent els productes obtenim $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.