2. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, en què a és un paràmetre real.
   a. Trobeu per a quins valors del paràmetre a la recta tangent a la funció f en $x = 1$ és paral·lela a $y + 3x + 5 = 0$. *[1 punt]*
   b. Per al valor del paràmetre $a = 1$, trobeu els intervals de creixement i decreixement i els punts on s'assoleixen els màxims i mínims relatius de la funció f. *[1 punt]*

Solució:

a. Com que la derivada és el pendent de la recta tangent, hem d'imposar la condició $f'(1) = -3$. La derivada de la funció donada f és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2\,a\,x}{(x-a)^2}$$

Per tant, hem de resoldre l'equació

$$\frac{1-2a}{(1-a)^2} = -3$$

o equivalentment $3\,a^2 - 8a + 4 = 0$, que dona com a solucions $a = 2$ i $a = \frac{2}{3}$.

b. Hem d'estudiar la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ que té domini $\mathbb{R}$-$\{1\}$. La derivada és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2\,x}{(x-1)^2}$$

i s'anul·la en $x = 0$ i $x = 2$.

Estudiant els signes de la derivada obtenim:

$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2, \infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
f creixent	f decreixent	f decreixent	f creixent

Es dedueix que la funció f té un màxim relatiu al punt $(0, f(0)) = (0,0)$ i un mínim relatiu al punt $(2, f(2)) = (2,4)$.

6. El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció $P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, en què t mesura el nombre d'anys transcorreguts.
   a. Quina és la població inicial i la població després de 9 anys? A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus? *[1 punt]*
   b. Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població? *[1 punt]*

Solució:

a) Ens demanen que calculem la població inicial $P(0) = 5$ milions d'habitants i la població al cap de 9 anys, $P(9) = 0{,}86$ milions d'habitants.

Hem de trobar també a partir de quin instant la població serà inferior a un milió d'habitants, és a dir, per a quin valor de t es compleix $\frac{5+t^2}{(t+1)^2} < 1$. Aïllant obtenim $t > 2$, és a dir, a partir del segon any la població serà inferior a un milió d'habitants.

b) Hem de calcular el límit quan el temps tendeix a infinit. Tenim que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2+5}{t^2+2t+1} = 1$$

Per tant, la grandària de la població a llarg termini tendirà a un milió d'habitants.

1. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$.

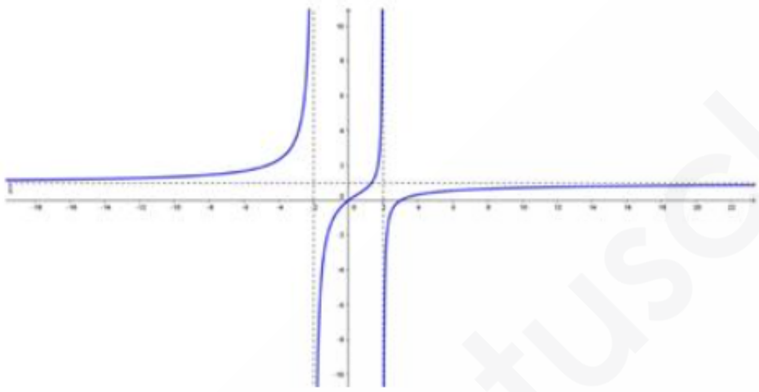
a) Indiqueu-ne justificadament el domini i determineu els punts en què la gràfica de *f* talla l'eix de les abscisses.
[1 punt]

b) Estudieu-ne el creixement i feu un esbós aproximat de la gràfica de la funció.
[1 punt]

Solució:

a) $x^2 - 4 = 0$ si $x = \pm 2$, per tant, el domini de f són tots els nombre reals excepte aquests dos. D'altra banda, $x^2 - 3x = 0$ quan $x = 0$ o $x = 3$: la gràfica de f talla l'eix d'abscisses en els punts (0,0) i (3,0).

b) La derivada de la funció f és $f'(x) = \frac{3x^2-8x+12}{(x^2-4)^2}$. Com que $3x^2 - 8x + 12 = 0$ no té solucions reals i f' sempre és positiva la funció f és creixent en tot el seu domini. La seva gràfica aproximada és:



3. Sigui $y = f(x)$ una paràbola que té el vèrtex en el punt $V = (0, -4)$ i talla l'eix de les abscisses en els punts $(-2, 0)$ i $(2, 0)$.

a) Determineu-ne l'equació.

[1 punt]

b) Sigui una funció g tal que $g'(x) = f(x)$. Estudieu el creixement de la funció g, determineu-ne les abscisses dels extrems relatius i classifiqueu-los.

[1 punt]

Solució:

a) L'equació de la paràbola serà $y = a(x-0)^2 - 4$ i, si ha de passar pels dos punts que ens donen, obtenim que $a = 1$. Per tant, l'equació de la paràbola és $y = x^2 - 4$. Alternativament es pot plantejar un sistema de tres equacions i tres incògnites a partir dels tres punts.

b) La paràbola és positiva per a $x < -2$ o $x > 2$, i negativa per $-2 < x < 2$. Per tant, la funció g és creixent en els dos primers intervals i decreixent en l'altre. Conseqüentment, g té un màxim relatiu en $x = -2$ i un mínim relatiu en $x = 2$.

4. Considereu el sistema d'equacions $\left.\begin{array}{r} 2x-y-1=0 \\ -x-y+2=0 \end{array}\right\}$.

Justifiqueu si les afirmacions següents són certes:

a) Aquest sistema d'equacions representa dues rectes paral·leles perquè totes dues tenen pendent -1.

[1 punt]

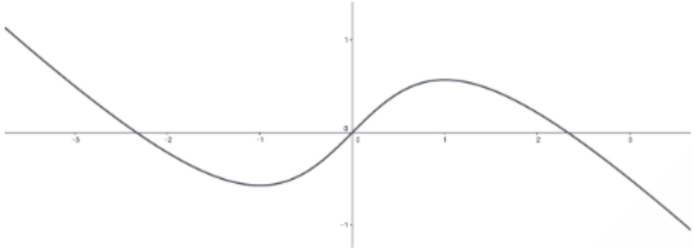
b) Aquest sistema és compatible determinat i la solució és $x=1$, $y=1$.

[1 punt]

Solució:

a) Les rectes son $y = 2x - 1$ que té pendent 2 i $y = -x + 2$ que té pendent -1. Per tant no són paral·leles.
b) Si resolem el sistema format per les dues equacions obtenim la solució $x = 1$, $y = 1$. Alternativament podem comprovar que $x = 1$, $y = 1$ satisfà les dues equacions.

6. A continuació es mostra la gràfica d'una funció f que presenta un mínim relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$ i un màxim relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$.



a) Sabent que $f'(0) = 1$, determineu l'equació de la recta tangent a f que passa per l'origen de coordenades.
[1 punt]

b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f' amb les dades de què disposeu.
[1 punt]

Solució:

a) El pendent de la recta tangent és 1, i passa per l'origen. Per tant l''equació serà $y = x$.
b) Com que f és decreixent fins a $x = -1$, en aquest interval f' serà negativa. Si $-1 < x < 1$ la funció és creixent. Per tant, la derivada és positiva, mentre que si $x > 1$ la derivada torna a ser negativa. Com que a més a més sabem que $f'(0) = 1$, la gràfica serà aproximadament així