1. Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ en què a és un nombre real.
   a. Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. *[1 punt]*
   b. Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M. És a dir, $M \cdot M^{-1} = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2. *[1 punt]*

Solució:

a) Comencem calculant M^2: $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix}$.
Sabem que $\begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. Obtenim, per tant, que cal que es compleixi que $4 - a^2 = 3$ i que $-a^2 = -1$. En ambdós casos tenim que $a^2 = 1$, que té per solucions $a = 1$ i $a = -1$.

b) Sabem que $M \cdot M^{-1} = I$. Però com que sabem la forma que ha de tenir M^{-1}, tenim que $M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2+2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. I imposant que aquesta darrera matriu ha de ser igual a la matriu identitat, tenim que $-a = 1$, és a dir, que $a = -1$, i que $2 + 2a = 0$, que també es compleix quan $a = -1$. Per tant, l'única solució és $a = -1$.
Alternativament es pot calcular la matriu inversa M^{-1} i igualar a la forma que ha de tenir segons l'enunciat del problema.

3. En Pol va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 refrescos, 3 entrepans i 5 boles de gelat. Tot plegat els va costar 19,50€. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí i per 2 refrescos, 1 entrepà i 2 boles de gelat havien pagat 8,10€. En aquest bar tots els refrescos valen el mateix, tots els entrepans tenen el mateix preu i les boles de gelat es venen també a preu únic.
    a. Avui en Pol hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 6 refrescos, 5 entrepans i 8 boles de gelat. Expliqueu raonadament quant han pagat en total. *[1 punt]*
    b. Si 1 refresc, 1 entrepà i 1 bola de gelat costen 5,10€, quant val el refresc, l'entrepà i la bola de gelat separadament? *[1 punt]*

Solució:

a) Si anomenem x, y i z respectivament el preu d'un refresc, d'un entrepà i d'una bola de gelat sabem que es compleixen les dues equacions següents:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{cases}$$

Ara necessitem calcular el valor de $6x + 5y + 8z$, però observem que podem descompondre $6x + 5y + 8z$ en

$$2 \cdot (4x + 3y + 5z) - 1 \cdot (2x + y + 2z) = 6x + 5y + 8z$$

Per tant, el preu serà $2 \cdot 19{,}50 - 1 \cdot 8{,}10 = 30{,}90€$.

Una altra opció és buscar la solució del sistema $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{cases}$, que és un sistema compatible indeterminat amb solució:

$\begin{cases} x = 2{,}40 - \frac{t}{2} \\ y = 3{,}30 - t \\ z = t \end{cases}$ i, per tant, $6x + 5y + 8z = 6 \cdot \left(2{,}40 - \frac{t}{2}\right) + 5 \cdot (3{,}30 - t) + 8t =$ $14{,}40 - 3t + 16{,}50 - 5t + 8t = 30{,}90€$.

b) En aquest cas, tenim el sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$\begin{cases} x + y + z = 5{,}10 \\ 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{cases}$ que, si el resolem, per exemple, pel mètode de Gauss obtenim $x = 1{,}80€$, $y = 2{,}10€$ i $z = 1{,}20€$.

5. Un fabricant d'automòbils produeix els models Record i Astrid. Desa la producció en tres naus. A la primera nau té 150 vehicles del model Record i 120 vehicles del model Astrid. A la segona guarda 80 Record i 140 Astrid. Finalment, a la tercera nau emmagatzema 250 Record i 125 Astrid. A més, el preu dels automòbils Record és de 6.520 €, mentre que cada Astrid val 8.130 €. Tota aquesta informació està recollida en les matrius següents:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Què representa la matriu $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$? Calculeu-la.
[1 punt]

b) Què representa la matriu $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}$? Calculeu-la.
[1 punt]

Solució:

a) El producte $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ ens dona el nombre de cotxes que tenim de cada model:
$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = (\ 480 \quad 385\ )$.
b) El producte $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$ ens dona el valor total dels cotxes emmagatzemats:
$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} = 6.259.650$.