5. Una companyia de mòbils va presentar fa un any un telèfon intel·ligent al preu de 750€. Recentment, un estudi de mercat ha arribat a la conclusió que, amb aquest preu, compren el telèfon 2.000 clients al mes, i que la relació entre aquestes dues variables és lineal, de manera que per cada 10 euros que s'incrementa el preu del mòbil, el compren 100 clients menys, i a l'inrevés: per cada 10 euros de descompte sobre el preu inicial de 750 euros, el compren 100 clients més.
    a. Deduïu que la funció que determina els ingressos mensuals de la companyia segons el preu del mòbil és $I(p) = -10p^2 + 9500p$. *[1 punt]*
    b. Trobeu quin ha de ser el preu del mòbil per a obtenir ingressos, el preu del mòbil que dona els ingressos mensuals més elevats i el valor d'aquests ingressos màxims. *[1 punt]*

Solució:

a) El preu del mòbil serà $p = 750 + 10x$, en què x és el nombre de vegades que s'augmenta el preu de l'abonament en 10 euros. El nombre de mòbils que es vendran al mes serà $N = 2000 - 100x$.
L'ingrés mensual I vindrà donat pel preu del mòbil p multiplicat pel nombre de mòbils que es venguin N, és a dir, $I = p \cdot N$. Si volem posar la funció d'ingrés en funció del preu del mòbil, caldrà aïllar la x en funció del preu p $\left(p = 750 + 10x \rightarrow x = \frac{p-750}{10}\right)$, llavors el nombre de mòbils en funció del preu p serà: $N = 2000 - 100\left(\frac{p-750}{10}\right) \rightarrow N = -10p + 9500$. Així que la funció d'ingressos serà: $I(p) = p \cdot (-10p + 9500)$.
Obtenim, per tant, la paràbola $I(p) = -10p^2 + 9500p$.

b) Perquè hi hagi ingressos cal que $I(p) > 0 \rightarrow -10p^2 + 9500p > 0 \rightarrow p \cdot (-10p + 9500) > 0$. Per tant, o bé $p > 0$ i $-10p + 9500 > 0$, d'on obtenim $0€ < p < 950€$, o bé caldria que $p < 0$ i que $(-10p + 9500) < 0$, que no té sentit per la naturalesa del problema.

Per trobar el màxim ingrés derivem: $I'(p) = -20p + 9500$, i igualem a zero: $I'(p) = 0 \rightarrow p = 475$ €. Comprovem que correspon als ingressos màxims ja que $I'(p) > 0$, per a $p < 475$ i $I'(p) < 0$, per a $p > 475$. Finalment, per calcular el valor d'aquests ingressos màxims, només cal calcular el valor de la funció Ingrés per a $p = 475 \rightarrow I(475) = 475 \cdot (-10 \cdot 475 + 9500) = 475 \cdot 4750 = 2.256.250€$

També es pot resoldre tenint en compte que la gràfica de la funció d'ingrés és una paràbola i obtenint-ne el màxim.