3. La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt (-2, -6) i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix d'abscisses.
   a) Calculeu el valor de a. *[1 punt]*
   b) Calculeu el valor de b. *[1 punt]*

Solució:

a) Sabem que la recta tangent en el punt (-2, -6) és paral·lela a l'eix d'abscisses, per tant, el seu pendent és 0. Calculem la derivada de la funció

$$f'(x) = a - \frac{8}{x^2}.$$

Per tant, $f'(-2) = a - 2$. Imposem que $f'(-2) = 0$ i trobem que $a = 2$.

b) Sabem que la funció passa pel punt (-2, -6). Per tant, sabem que $f(-2) = -6$. Tenim per tant que $2\cdot(-2) + b + \frac{8}{(-2)} = -6$, que ens dona $b - 8 = -6$ i, finalment, $b = 2$.

4. La funció $f(x) = \frac{40}{x^2-22x+125}$ ens mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x, en què x és el dia del mes de febrer.

   a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer? *[0,75 punts.]*

   b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitat se'n van vendre? *[1,25 punts.]*

Solució:

a) D'una banda $f(5) = 1$. Per tant, el dia 5 de febrer es van vendre, aproximadament, 1.000 unitats de perfum.

D'altra banda, $f(7) = 2$ i $f(9) = 5$. Per tant, entre el dia 7 i el dia 9 hi ha un increment aproximat de vendes de 3.000 unitats de perfum.

b) Per trobar el màxim de vendes, cal fer la derivada:
$f'(x) = \frac{-40\cdot(2x-22)}{(x^2-22x+125)^2}$.

Si igualem la derivada a zero, trobem que hi ha un possible extrem relatiu en $x = 11$. Si fem un estudi del signe de la derivada, observem que, per a x menor d'11, la derivada és positiva, i, per tant, la funció creix, mentre que per a x més gran d'11, la derivada és negativa, i, per tant, la funció decreix. Deduïm, per tant, que en $x = 11$ hi ha un màxim.

Observem que $f(11) = 10$. Per tant, el dia que es van vendre més perfums va ser el dia 11 de febrer i se'n van vendre aproximadament 10.000 unitats.

6. Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Se sap que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n,$$

per a $10 \leq t \leq 21$

a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.
[1 punt]
b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.
[1 punt]

Solució:

a) La derivada de la funció $I(t)$ ve donada per $I'(t) = -10(m-t)(-1) = 10(m-t)$. Sabem que en $t = 18$ hi ha un extrem relatiu, per tant, $I'(18) = 0$, és a dir, $10(m-18) = 0$, i obtenim que $m = 18$.

b) També sabem que $I(21) = -5(18-21)^2 + n = 500$, i, per tant, obtenim que $n = 545$.

1. Considereu la funció $f(x) = 2x^3 + ax$. Calculeu el valor de la constant a per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$. Digueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim i doneu també el valor que pren la funció $f(x)$ en aquest punt.
[2 punts]

Solució:

Comencem calculant la derivada de la funció $f(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 + a.$$

Per tal que la funció tingui un extrem relatiu en $x = -1$ cal que en aquest punt s'anul·li la derivada. Imposant doncs que $f'(-1) = 0$ trobem que $a = -6$. Per tant la funció és $f(x) = 2x^3 - 6x$ i la derivada $f'(x) = 6x^2 - 6$. Observem que $f'(x) > 0$ per $x < -1$ i que $f'(x) < 0$ per $x \in (-1,1)$. Per tant la funció $f(x)$ és creixent en l'interval $(-\infty, -1)$ i és decreixent en l'interval $(-1,1)$. Així doncs en el punt $x = -1$ hi trobem un màxim relatiu.

Finalment ens demanen $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) = 4$.

3 Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6},$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

a) Justifiqueu que la funció f és estrictament decreixent quan $x \geq 0$. *[0,75 punts]*

b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pes a llarg termini? Argumenteu si aquest valor límit s'assolirà en algun moment. *[1,25 punts]*

Solució:

a) Tenint en compte que x és el nombre de mesos seguint la dieta cal considerar $Dom(f) = [0, +\infty)$. En aquest interval la funció f no presenta cap discontinuïtat, ja que l'únic valor de x pel qual s'anul·la el denominador és $x = -6$. Per estudiar si la funció és decreixent en aquest interval caldrà calcular la funció derivada de $f\ (x)$:

$$f'(x) = \frac{-132}{(x+6)^2}.$$

L'equació $f'(x) = 0$ no presenta cap solució i veiem clarament que $f'(x) < 0$ per a tot $x \geq 0$. Així doncs la funció és estrictament decreixent en tot el seu domini.

b) El pes inicial del pacient serà $f(0) = \frac{510}{6} = 85$. Al cap de dos mesos pesaria $f(2) =$ 79,5 kg. Per saber a quin valor tendeix el pes cal calcular el límit de $f(x)$ quan $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{63x+510}{x+6} = 63.$$

Aquest valor no s'assolirà mai ja que la funció és estrictament decreixent per a tot $x \geq\ 0$.