1. En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte. *[2 punts]*

Solució:

Considerem les variables x, y i z, que representen el nombre de participants que escullen el producte A, B i C, respectivament.

Obtenim el sistema d'equacions següent

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ y=2x \\ y=x+z+32 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ 2x-y=0 \\ x-y+z=-32 \end{cases}$$

Apliquem per resoldre'l el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -32 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 3 & 2 & 1.000 \\ 0 & 2 & 0 & 532 \end{array}\right).$$

Es veu clarament que és suficient intercanviar la segona i la tercera columnes per tenir la matriu diagonalitzada i, per tant, podem concloure que és un sistema compatible determinat. En la resolució s'obté $x=133$, $y=266$ i $z=101$.

2. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $\boldsymbol{M}^2 + a \cdot \boldsymbol{M} + b \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la. *[1 punt]*

b) Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius $\boldsymbol{B}$ que commuten amb la matriu $\boldsymbol{A}$, és a dir, que compleixen que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. *[1 punt]*

Solució:

a) Comencem calculant M^2:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim el sistema:

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que ens dona el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 14 + 2a + b = 0 \\ 5 + 5a = 0 \\ 2 + 2a = 0 \\ 11 - a + b = 0 \end{cases}$$

Tant de la segona com de la tercera equacions deduïm que $a = -1$, i substituint el valor de a, tant a la primera com a la quarta equació, obtenim que $b = -12$.

b) Hem de trobar els valors de x, y, z i t per als quals es compleix que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si fem els dos productes cal que es compleixi la igualtat:

$$\begin{pmatrix} z & t \\ x - z & y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x - y \\ t & z - t \end{pmatrix}.$$

Per tant, cal que $z = y$, $t = x - y$, $x - z = t$ (però com que $z = y$, tornem a obtenir que $t = x - y$) i $y - t = z - t$ (que ens torna a donar que $z = y$).

Per tant, les úniques condicions que hem obtingut són $z = y$ i $t = x - y$. És a dir, la matriu A commutarà amb totes les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x - y \end{pmatrix},$$

per a qualsevol valor de x i de y.

4 Per la Festa Major, la pastisseria del poble elabora unes capses de bombons especials. La capsa petita conté 10 bombons, la mitjana té 15 bombons i la gran en té 25. Cada capsa va decorada amb una llaç commemoratiu. En total han utilitzat 210 llaços i 2.650 bombons. Tenint en compte que han elaborat el doble de capses petites que de mitjanes i grans juntes, quantes capses de cada tipus han elaborat? *[2 punts]*

Solució:

Sigui x la quantitat de capses de bombons petites elaborades, y la quantitat de capses mitjanes i z la quantitat de grans.

A partir de les condicions de l'enunciat obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + \ y + \ z \ = \ 210 \\ 10x + 15y + 25z = 2.650 \\ 2 \cdot (y+z) = x \end{cases}$$

Que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \\ 2x + 3y + 5z = 530 \\ x - 2y - \ 2z = 0 \end{cases}$$

Si el resolem pel mètode de Gauss obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 2 & 3 & 5 & 530 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & -3 & -3 & -210 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & 0 & -6 & -120 \end{array}\right).$$

I d'aquí deduïm que $x = 140$, $y = 50$ i $z = 20$.

6. En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu P ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1, A2$ i $A3$, segons els proveïdor $p1$, $p2$ i $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x\ y\ z)$.

a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$. *[0,5 punts]*

b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per tota la comanda? Quin és aquest preu? *[1,5 punts]*

Solució:

a) Quan fem el producte de la comanda C per la matriu de preus unitaris P obtenim un vector fila que és el preu total de la comanda per cadascun dels tres proveïdors.

b) En aquest cas el vector de la comanda és $C = (25\ 10\ 15)$. Calculem el producte $C \cdot P$:

$$(25\ 10\ 15).\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (430\ 415\ 410).$$

Per tant el preu total de la comanda és de 430 € pel proveïdor $p1$, de 415 € pel proveïdor $p2$ i de 410 € en el cas del proveïdor $p3$.

Així doncs el millor preu del total de la comanda ens l'ofereix el proveïdor $p3$ i és de 410 €.