2. L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1.470x$ ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què x denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir, $x \in [0, 12]$).

a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any? Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12.
[1,25 punts]

b) Comproveu que la funció és creixent en l'interval [0, 12] i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent.
[1,25 punts]

Solució:

a) Per saber les unitats venudes al cap de 3 mesos cal calcular $f(3) = 2.790$, per tant, s'havien venut 2.790 unitats. Al cap d'un any es van vendre $f(12) = 4.680$ unitats.

Pel que fa a la taxa de variació mitjana, tenim que

$$TVM(3,12) = \frac{f(12) - f(3)}{12 - 3} = \frac{4.680 - 2.790}{9} = 210 .$$

b) Com que f és una funció polinòmica de grau 3, és contínua i derivable en tots els reals. Per estudiar el creixement de la funció comencem calculant la funció derivada:

$$f'(x) = 30x^2 - 420\,x + 1.470.$$

Igualem $f'(x) = 0$ per obtenir els possibles màxims i mínims. L'únic zero el trobem en el punt d'abscissa $x = 7$. Observem que $f'(x) = 30(x - 7)^2$, per tant, deduïm fàcilment que $f'(x) \geq 0$ per a tots els reals, i que $f'(x) = 0$ només per a $x = 7$. Així doncs, la funció f és creixent per a $x \in [0,12]$ i l'instant en què el creixement és més lent és als 7 mesos del llançament del producte (és on la funció derivada assoleix el valor mínim).

2. Una empresa vol fabricar un producte nou. Encomana un estudi de mercat que determina que l'evolució de les vendes al llarg dels propers sis anys seguirà la funció $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en què $f(t)$ representa la quantitat de milers d'unitats venudes en funció del temps $t \in [0, 6]$ expressat en anys.

a) Quantes unitats vendrà el primer any? Tret de l'instant inicial ($t = 0$), es preveu que hi haurà algun altre any en què no es produirà cap venda?
[1,25 punts]

b) En quin any es produirà el màxim nombre de vendes i quants productes s'hauran venut aquell any?
[1,25 punts]

Solució:

a) Calculem $f(1) = 1 - 12 + 36 = 25$. Per tant, el primer any es vendran 25.000 unitats.

D'altra banda, observem que $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t = t \cdot (t-6)^2$. Per tant, els únics instants en que no es produeix cap venda és a l'instant inicial $t = 0$ i al sisè any, $t = 6$.

b) Si calculem la derivada $f'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3 \cdot (t-6) \cdot (t-2)$, observem que s'anul·la en els punts $t = 2$ i $t = 6$. Sabem, per l'apartat anterior, que en l'instant $t = 6$ és l'únic $t > 0$ pel qual no s'ha produït cap venda, per tant serà un mínim. Observem que passa amb l'instant $t = 2$. Veiem que $f'(t) > 0$ per $t < 2$ i, en canvi $f'(t) < 0$ per $t \in (2,6)$. Per tant, com que nosaltres tenim definida la funció en $t \in [0,6]$, el màxim de vendes es produeix el segon any. Calculem $f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$ i, per tant, el nombre de productes venuts aquest any és de 32.000 unitats.

4. Considereu la funció $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

***a*)** Trobeu els valors dels paràmetres a, b i c sabent que la funció té un màxim en el punt (2, 1) i un mínim en el punt (0, –1).
[1,25 punts]

***b*)** Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció per als valors dels paràmetres a, b i c trobats a l'apartat anterior.
[1,25 punts]

Solució:

a) Comencem calculant la derivada de la funció: $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$. Sabem que la funció passa pel punt $(0,-1)$. D'altra banda, $f(0) = c$. Per tant, deduïm que $c = -1$.
Sabem també que passa pel punt (2,1), i com que $f(2) = 16a + 4b - 1$ deduïm que $16a + 4b - 1 = 1$, és a dir, que $16a + 4b = 2$.
Com que en x=0 i en x=2 hi ha extrems relatius, en aquests punts s'ha d'anul·lar la derivada. D'una banda, $f'(0) = 0$, i per tant no ens aporta informació addicional, però d'altra banda tenim que $f'(2) = 32a + 4b$. I, per tant, sabem que $32a + 4b = 0$.
Resolem el sistema

$$\begin{cases} 16a + 4b = 2 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases}$$

I trobem que la solució és $a = -\frac{1}{8} = -0{,}125$, $b = 1$ i, ja sabíem que, $c = -1$.

b) Tenim la funció $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 - 1$. Calculem la seva derivada
$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$
Si l'igualem a zero tenim que $-\frac{1}{2}x^3 + 2x = 0$, que és equivalent a, $x \cdot (x^2 - 4) = 0$ que té per solucions $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.
Observem que $f'(x) > 0$ si $x < -2$, que $f'(x) < 0$ si $x \in (-2,0)$, $f'(x) > 0$ si $x \in (0,2)$ i $f'(x) < 0$ si $x > 2$. Per tant, la funció és creixent en els intervals $(-\infty,-2) \cup (0,2)$ i és decreixent en $(-2,0) \cup (2,+\infty)$.