1. Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la.

Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les i 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €.

Quantes publicacions va vendre de cada tipus?

[2,5 punts]

Solució:

Si anomenem x el nombre de còmics venuts, y el nombre de revistes venudes i z el nombre de novel·les venudes, sabem que:

$$\begin{aligned} y &= 2z \\ x &= y - 5 \\ x + 1{,}5y + 2z &= 30 \end{aligned}$$

Per tant, hem de resoldre el sistema:

$$\begin{aligned} x - y &= -5 \\ y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 60 \end{aligned}$$

El resolem utilitzant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 60 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 70 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 70 \end{array}\right)$$

D'on obtenim que $x = 5$, $y = 10$ i $z = 5$. És a dir, s'han venut 5 còmics, 10 revistes i 5 novel·les.

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que es compleix que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^2$.
[1,25 punts]

b) Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]

Solució:

a) Per fer aquesta comprovació comencem calculant la matriu A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per comprovar que $A^{-1} = A^2$ hem de veure que $A^2 \cdot A = I$. Fem, doncs, el càlcul de $A^2 \cdot A$:

$$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Com que, efectivament hem obtingut que $A^2 \cdot A = \mathrm{I}$ aleshores $A^{-1} = A^2$.

Evidentment, una altra solució correcta alternativa seria trobar A^{-1} i comprovar que efectivament $A^{-1} = A^2$.

b) Si aïllem la X respectant la no commutativitat de les matrius obtenim

$$X = A^{-1} \cdot (I - B).$$

Però com què $A^{-1} = A^2$ podem resoldre l'equació fent

$$X = A^{-1} \cdot (I - B) = A^2 \cdot (I - B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un altre cop tenim una solució alternativa que passaria per considerar $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i trobar la solució del sistema de quatre equacions i quatre incògnites que se'n deriva.

1. La taula següent reflecteix el preu unitari, expressat en euros, de tres productes P_1, P_2 i P_3, subministrats a un restaurant per dues empreses diferents E_1 i E_2:

	E_1	E_2
P_1	6	5
P_2	5	8
P_3	9	7

El restaurant haurà de fer dues comandes: una aquesta setmana i una altra la setmana que ve. Aquesta setmana necessita 8 unitats del producte P_1, 5 unitats del producte P_2 i 12 unitats del producte P_3; mentre que per a la setmana vinent necessitarà 10 unitats del producte P_1, 15 unitats del producte P_2 i 7 unitats del producte P_3.

***a*)** Escriviu en forma matricial la informació que relaciona el preu unitari dels productes i les empreses subministradores, i també la informació de les quantitats de productes demanats en cada una de les dues comandes que ha de fer el restaurant.
[1,25 punts]

***b*)** Calculeu a quina de les dues empreses ha d'encarregar el restaurant cada una de les comandes perquè li surti més econòmica i a quin preu li sortirà cadascuna.
[1,25 punts]

Solució:

a) La matriu que relaciona el preu unitari de cada producte amb l'empresa subministradora és:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

I les matrius files de les dues comandes són:

$$B = (8 \quad 5 \quad 12) \text{ i } C = (10 \quad 15 \quad 7)$$

b) Per saber el preu total, en euros, de la primera comanda a cada una de les empreses calculem:

$$B \cdot A = (8 \quad 5 \quad 12)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (181 \quad 164).$$

Per tant la primera comanda és més econòmic fer-la a l'empresa E_2 i ens costarà 164 €.

Per saber el preu de la segona comanda a cada una de les empreses calculem:

$$C \cdot A = (10 \quad 15 \quad 7)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (198 \quad 219).$$

Per tant la segona comanda és més econòmic fer-la a l'empresa E_1 i ens costarà 198 €.

5. En una empresa de tecnologia hi ha un total de 100 empleats dividits en tres seccions: administració, recerca i publicitat. Tots els empleats de cada secció cobren el mateix sou mensual: 2.000 euros els d'administració, 2.400 euros els de recerca i 2.800 euros els de publicitat, i la despesa total mensual en salaris de l'empresa és de 228.000 euros.

***a*)** Plantegeu i estudieu el sistema d'equacions associat. Justifiqueu si es pot determinar el nombre d'empleats de cada secció.
[1,25 punts]

***b*)** Una reestructuració recent ha obligat a acomiadar $\frac{1}{10}$ part dels empleats d'administració, $\frac{1}{6}$ part dels de recerca i $\frac{1}{5}$ part dels de publicitat. Aquest fet ha significat un estalvi mensual en salaris de 33.200 euros. Determineu quants empleats tenia cada secció de l'empresa abans de la reestructuració.
[1,25 punts]

Solució:

a) Considerem les variables x, y, z com el número d'empleats de les seccions d'administració, recerca i publicitat, respectivament. Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2.000\, x + 2.400\, y + 2.800\, z = 228.000 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5\, x + 6\, y + 7\, z = 570 \end{cases}$$

Aplicarem el mètode de Gauss. Prenem les variables en l'ordre donat x, y, z. Tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \end{array}\right)$$

I, aplicant el mètode de Gauss s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \end{array}\right)$$

Per tant tenim que la matriu i la matriu ampliada tenen rang 2, mentre que el número d'incògnites és 3, així que es tracta d'un sistema compatible indeterminat i no poden determinar el nombre d'empleats de cada secció.

b) Plantegem el problema com abans però afegint l'equació addicional que ens dona l'enunciat:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5\, x + 6\, y + 7\, z = 570 \\ 2000 \cdot \dfrac{x}{10} + 2400 \cdot \dfrac{y}{6} + 2800 \cdot \dfrac{z}{5} = 33.200 \end{cases}$$

que reescrivim com a:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5\, x + 6\, y + 7\, z = 570 \\ 5\, x + 10\, y + 14\, z = 830 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \\ 5 & 10 & 14 & 830 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 5 & 9 & 330 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \end{array}\right)$$

Podem concloure que és un sistema compatible determinat ja que, tant el rang de la matriu, com el de la matriu ampliada, com el nombre d'incògnites, és 3. Resolent-lo s'obté la solució $x = 50$, $y = 30$ i $z = 20$. És a dir, inicialment hi havia 50 empleats d'administració, 30 de recerca i 20 de publicitat.