3. El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.

a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú.
[1,25 punts]

b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu?
[1,25 punts]

Solució:

a) Comencem fent un esquema del plantejament. Anomenem x el sobrepreu sobre els 18 €.

Preu menú (€)	Benefici (€)	Nombre de clients	Benefici total (€)
18	10	120	$10 \cdot 120 = 1.200$
$18 + x$	$10 + x$	$120 - 4x$	$(10 + x)(120 - 4x)$

Per tant, la funció que expressa el benefici del restaurant és

$$B(x) = (10 + x)(120 - 4x) = 1200 + 80x - 4x^2.$$

b) Observem que la funció benefici és una paràbola amb coeficient de grau 2 negatiu i, per tant, tindrà el seu màxim en el vèrtex. També podem obtenir aquest màxim derivant i igualant a zero la derivada:

$$B'(x) = 80 - 8x.$$

Igualant a zero obtenim que hi ha un extrem relatiu en $x = 10$. Veiem clarament que es tracta d'un màxim perquè $B'(x) > 0$ per $x < 10$ i $B'(x) < 0$ per $x > 10$.

Per tant, es conclou que per maximitzar els beneficis el restaurant ha d'apujar el menú en 10 €. El preu final del menú serà de 28 € i el benefici màxim obtingut amb aquest preu serà de $B(10) = 1.600$ €.

6. El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què x indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x + 20}{x^2 + 9} - \frac{20}{9}.$$

a) Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues?
[1,25 punts]

b) En quin moment aconsegueix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim?
[1,25 punts]

Solució:

a) Per trobar el benefici en el moment en què es posa en funcionament l'empresa hem de calcular $B(0)$. Observem que $B(0) = 0$ i, per tant, en el moment inicial l'empresa no té ni beneficis ni pèrdues.

Per saber quan l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues mirem quan s'anul·la la funció benefici.

$$B(x) = 0 \;\leftrightarrow\; \frac{5x + 20}{x^2 + 9} - \frac{20}{9} = 0 \;\leftrightarrow\; x(4x - 9) = 0.$$

Per tant $B(x)$ només s'anul·la per $x = 0$ i per $x = \frac{9}{4} = 2{,}25$. Observem, d'altra banda, que $B(x)$ està ben definida per a tot x i que per als valors de $x \in \left(0, \frac{9}{4}\right)$ és positiva. Per tant, l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues quan porta $\frac{9}{4}$ d'any en funcionament, és a dir, als 2 anys i 3 mesos.

b) Per trobar el punt on s'assoleix el màxim, comencem calculant la derivada de la funció $B(x)$:

$$B'(x) = \frac{-5x^2 - 40x + 45}{(x^2+9)^2}.$$

Igualem la derivada a zero: $B'(x) = 0$ i obtenim dues solucions $x = -9$ i $x = 1$. Observem que la derivada, $B'(x)$, és positiva entre $x = 0$ i $x = 1$ i, per tant, el benefici és creixent en aquest interval de temps. A partir de $x = 1$ la funció benefici és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant, en $x = 1$, és a dir, al primer any, la funció benefici assoleix un màxim, i a partir d'aquí la funció benefici disminueix. El valor del benefici màxim és:

$$B(1) = \frac{5+20}{1+9} - \frac{20}{9} = \frac{25}{10} - \frac{20}{9} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18} = 0{,}278 \text{ milions d'euros.}$$

6. Un centre de formació organitza un curs subvencionat que té un cost fix de 9.000 €, al qual cal sumar una quantitat que varia segons el nombre d'alumnes del curs i que és donada per la funció $0{,}02x^3 - 24x$, en què x representa el nombre d'alumnes matriculats. El Consell Comarcal ha atorgat al centre una subvenció de 5.000 € per a l'organització del curs i l'Ajuntament paga al centre 30 € per cada alumne matriculat.

La despesa que ha d'assumir el centre és la diferència entre el cost total del curs i les dues subvencions rebudes.

Quants alumnes s'han de matricular al curs perquè la despesa sigui mínima per al centre i quina seria aquesta despesa?

[2,5 punts]

Solució:

El cost del curs, en funció del nombre d'alumnes matriculats x, serà: $C(x) = 9.000 + 0{,}02x^3 - 24x$.
La subvenció rebuda en funció del nombre d'alumnes serà: $S(x) = 5.000 + 30x$.
Per tant, la despesa en funció del nombre d'alumnes serà:

$$\begin{aligned} D(x) &= C(x) - S(x) \\ &= 9000 + 0{,}02x^3 - 24x - (5.000 + 30x) \\ &= 0{,}02x^3 - 54x + 4.000 \end{aligned}$$

Calculem la derivada: $D'(x) = 0{,}06x^2 - 54$. Igualant la derivada a zero obtenim que s'anul·la per $x = -30$ (que no té sentit en el nostre context) i per $x = 30$. Observem que $f'(x) < 0$ per $x \in (0{,}30)$ i, en canvi, $f'(x) > 0$ per $x > 30$. Per tant, en $x = 30$ hi ha un mínim.
Així doncs la despesa mínima s'obté amb 30 alumnes matriculats. Calculem $D(30) = 0{,}02 \cdot 30^3 - 54 \cdot 30 + 4.000 = 2.920$ €.
Per tant, la despesa és mínima si hi ha 30 alumnes matriculats i és de 2.920 €.