1. Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció $f(x)=\dfrac{-0,2x^2+5x-20}{x}$, en què *x* representa el nombre de tones de confeti venudes.

a) Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable *x* perquè la fàbrica no tingui pèrdues.
[1,25 punts]

b) Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici.
[1,25 punts]

Solució:

1.

a) Volem resoldre la inequació $f(x) \geq 0$. Resolem primer l'equació $f(x) = 0$. Obtenim:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-0{,}2)(-20)}}{2(-0{,}2)} = \frac{-5 \pm 3}{-0{,}4} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 20 \end{cases}$$

Per la naturalesa del problema, la funció només té sentit per a valors de $x > 0$ (no està definida per a $x = 0$), i observem que els valors per als quals $f(x) \geq 0$, i en què, per tant, la fàbrica no té pèrdues, són els de l'interval $[5, 20]$.

b) Comencem calculant la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(-0{,}4x + 5) \cdot x - (-0{,}2\,x^2 + 5x - 20)}{x^2} = \frac{-0{,}2x^2 + 20}{x^2}$$

Si imposem que $f'(x) = 0$, obtenim que $x^2 = 100$, que té per solucions $x = 10$ i $x = -10$. Per la naturalesa del nostre problema, només té sentit el valor $x = 10$. Per tant, en el punt d'abscissa $x = 10$ hi ha un extrem relatiu de la funció. A l'interval $(5, 10)$ la funció és creixent perquè $f'(x)$ és positiva, mentre que a l'interval $(10, 20)$ és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant en $x = 10$ hi ha un màxim.

Per a $x = 10$ la funció pren el valor $f(10) = 1$. Per tant, per a $x = 10$ s'obté el benefici màxim i aquest benefici és de 1.000 €.

6. Considereu la funció real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

a) Determineu el valor del paràmetre real a per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$.
[1,25 punts]

b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$ quan $a = 12$. Indiqueu també els punts en què hi ha extrems relatius i classifiqueu-los.
[1,25 punts]

Solució:

6.

a) Comencem calculant la derivada $f'(x) = 12x^2 + 2ax$. Si en el punt d'abscissa $x = -1$ hi ha un extrem relatiu, sabem que la derivada en aquest punt ha de ser zero. Per tant $f'(-1) = 12(-1)^2 + 2a(-1) = 0 \rightarrow 12 - 2a = 0 \rightarrow a = 6$.

Per tant, obtenim que el paràmetre $a = 6$.

b) Tenim ara $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2$. Comencem calculant la derivada: $f'(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x+2)$. Si la igualem a zero obtenim dues solucions $x = -2$ i $x = 0$.

Per tant, tenim que:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	funció creixent	màxim	funció decreixent	mínim	funció creixent

Observem que $f(-2) = 14$ i $f(0) = -2$.

Així doncs, la funció és creixent en els intervals $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ i és decreixent en l'interval $(-2, 0)$. D'altra banda, té un màxim relatiu en el punt $(-2, 14)$ i un mínim relatiu en el punt $(0, -2)$.

1. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

***a*)** Trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.
[1,25 punts]

***b*)** Estudieu en quins intervals la funció $f(x)$ és creixent i en quins és decreixent. Indiqueu-ne també els extrems relatius i digueu si són màxims o mínims.
[1,25 punts]

Solució:

1.

a)

El pendent de la recta tangent és $f'(0)$. Comencem per tant calculant la derivada:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}.$$

Per tant, $f'(0) = 2$.

El punt de tangència és (0, f(0)), és a dir (0, 0) i per tant l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en $x = 0$ és $y = 2x$.

b)

Per estudiar la monotonia de $f(x)$ estudiem el signe de la derivada. Per fer-ho, busquem els valors on la derivada pot canviar de signe que, en aquests cas, només són els punts de tall amb l'eix d'abscisses ja que és una funció contínua. Recordem que $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ i per tant si imposem que s'anul·li tenim $-2x^2+2=0$ que té per solucions $x = 1$ i $x = -1$.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+1)$	$(+1,+\infty)$
$-2x^2+2$	$-$	$+$	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	funció decreixent	funció creixent	funció decreixent

Per tant, la funció $f(x)$ és creixent a l'interval (-1, 1) i és decreixent a l'interval

$(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. D'altra banda, té un mínim relatiu en el punt $(-1, f(-1)) = (-1,-1)$ i un màxim relatiu en el punt $(1, f(1)) = (1,1)$.

4. Suposeu que la temperatura de l'aigua del mar en una zona concreta és donada per la funció $f(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+4}$, en què x representa la fondària en metres negatius (per exemple, $f(-5)$ representa el valor de la temperatura de l'aigua en graus Celsius a 5 metres de profunditat).

***a*)** Quina és la temperatura de l'aigua a la superfície? A quines profunditats la temperatura és de zero graus? Cap a quin valor tendeix la temperatura quan baixem a molta profunditat?
[1,25 punts]

***b*)** Calculeu a quina fondària la temperatura és més baixa i quin és el valor d'aquesta temperatura mínima.
[1,25 punts]

Solució:

a)

La temperatura de l'aigua a la superfície serà de $f(0) = 1$ grau centígrad. Per saber a quines profunditats la temperatura és de zero graus hem de resoldre l'equació $f(x) = 0$. Obtenim $x^2 + 5x + 4 = 0$ que té dues solucions, $x = -4$ i $x = -1$. Per tant la temperatura serà de zero graus a 1 metre i a 4 metres de profunditat.

Per obtenir la temperatura a molta profunditat calculem el límit següent:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4} = 1.$$

Per tant, la temperatura límit a molta profunditat serà d'un grau centígrad.

b)

Per calcular a quina fondària s'obté la temperatura mínima comencem calculant la derivada $f'(x) = \frac{(2x+5)(x^2+4)-2x(x^2+5x+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}$. Si igualem la derivada a zero, $f'(x) = 0$, veiem que la derivada s'anul·la en $x = 2$ i $x = -2$. Per la naturalesa del problema només té sentit $x = -2$. Es tracta d'un mínim perquè la derivada és negativa abans del punt $x = -2$ i es positiva entre $x = -2$ i $x = 2$.
Si calculem $f(-2) = -\frac{1}{4}$, obtenim que la temperatura mínima s'obté a dos metres de profunditat i la temperatura mínima és de $-\frac{1}{4}$ de grau centígrad.