3. En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.

***a*)** Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa.
[0,75 punts]

***b*)** Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat.
[1,75 punts]

Solució:

3.

a) Denotarem per x, y i z el nombre d'homes, dones i nens, respectivament, que han assistit a la festa. Obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

b) El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Els canvis que hem aplicat en el primer pas han estat $(F1, F2, F3) \rightarrow (F1, F1 - F2, F1 - F3)$. Mentre que en el segon pas hem fet $(F1, F2, F3) \rightarrow (F1, F3, \frac{F2}{4})$.

Deduïm, per tant, que $z = 5$, $2y = 19 - 5$, és a dir, $y = 7$ i, finalment, $x = 20 - 5 - 7$, és a dir, $x = 8$. Per tant, han assistit a la festa 8 homes, 7 dones i 5 nens.

5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu l'expressió general de A^n. Demostreu que la inversa de A^n és $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

b) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$.
[1,25 punts]

Solució:

5.

a) Comencem calculant les diferents potències de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

Per tant, deduïm que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, per comprovar si la matriu de l'enunciat és la inversa de la matriu A^n, multipliquem les dues matrius per veure si obtenim la matriu identitat:

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, efectivament, es tracta de la matriu inversa de A^n.

b) Per resoldre l'equació matricial, comencem aïllant la matriu X respectant les normes del producte de matrius:

$$A^{10}X - A^{20} = A \Longrightarrow A^{10}X = A + A^{20} \Longrightarrow X = (A^{10})^{-1}(A + A^{20}).$$

Utilitzant el que hem vist a l'apartat anterior, tenim, per tant, que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Una empresa de productes lactis va ingressar l'any passat un total d'1.800.000 € per les vendes de formatges. Les exportacions a la Unió Europea van aportar tants ingressos com les vendes en l'àmbit estatal i les exportacions a països extracomunitaris juntes. Aquest any l'empresa ha ingressat 1.950.000 € i sabem que les vendes estatals han disminuït un 5 %, les exportacions a la Unió Europea han augmentat un 15 % i les exportacions a països extracomunitaris han augmentat un 10 %. Determineu les quantitats que va ingressar per cada concepte (vendes en l'àmbit estatal, exportacions a la Unió Europea i exportacions a països extracomunitaris) l'any passat, i també les quantitats que ha ingressat aquest any.
[2,5 punts]

Solució:

3.

Considerem les variables següents:

x: import de les vendes a nivell estatal de l'any passat,

y: import de les exportacions a Europa de l'any passat,
z: import de les exportacions a països no comunitaris l'any passat.

S'obté el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 1.800.000 \\ y = x + z \\ 0{,}95\,x + 1{,}15\,y + 1{,}1\,z = 1.950.000 \end{cases}$$

El resolem pel mètode de Gauss, multiplicant la tercera equació per 100:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1.800.000 \\ 95 & 115 & 110 & 195.000.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 900.000 \\ 0 & 210 & 15 & 195.000.000 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 900.000 \\ 0 & 0 & 15 & 6.000.000 \end{array}\right)$$

Per tant és un sistema compatible determinat i resolent s'obté x=500.000, $y = 900.000\ i\ z = 400.000$.

Finalment, aquest any les vendes a nivell estatal han estat de 475.000 euros, les exportacions a Europa de 1.035.000 euros i les exportacions a països no comunitaris de 440.000 euros.

5. Fem dues proves de consum de combustible a un vehicle: en la primera, el vehicle recorre 200 km per carretera i 100 km per ciutat, i consumeix un total de 17 litres, mentre que en la segona recorre 300 km per carretera i 50 km per ciutat, i consumeix 17,5 litres. Suposant que els consums mitjans per carretera i per ciutat són sempre constants:

a) Quin és el consum mitjà per 100 km en cada una de les dues proves?
[1,25 punts]

b) Quants litres consumirà el mateix vehicle si en una tercera prova recorre 400 km per carretera i 150 km per ciutat?
[1,25 punts]

Solució:

a)

En la primera prova ha consumit 17 litres per recórrer 300 km, per tant la mitjana és de 0,057 litres per km o, equivalentment, 5,7 litres per 100 km.

En la segona prova ha consumit 17,5 litres per recórrer per 350 km, per tant la mitjana és de 0,05 l per km o, equivalentment, 5 litres per 100 km.

b)

Anomenem x = litres consumits per 100 km per carretera i y = litres consumits per 100 km per ciutat. Volem calcular el consum en litres en 400 km per carretera i 150 per ciutat, per tant volem calcular: $4x + 1{,}5y$.

De les dues primeres voltes sabem que

$$\begin{cases} 2x + y = 17 \\ 3x + 0{,}5y = 17{,}5 \end{cases}$$

Resolent el sistema obtenim que x=4,5 i y=8. Per tant el consum que ens demanen és 4·4,5+1,5·8=30 litres.

6. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, en què a és un nombre real.

***a*)** Calculeu A^2, A^3 i A^4.
[1,25 punts]

***b*)** Deduïu quant valdrà la matriu A^{100}.
[1,25 punts]

Solució:

a)

Calculem les matrius que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix} \quad \text{i}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}.$$

b)

Deduïm doncs que en general $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$ i per tant,

$$A^{100} = \begin{pmatrix} a^{100} & 0 \\ 100a^{99} & a^{100} \end{pmatrix}.$$