3. Considerem una funció $f(x)$ tal que la seva primera derivada és $f'(x) = x^2 + bx - 3$ en què b és un paràmetre real.
   a. Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -3$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. *[1 punt]*
   b. Per a $b = -8$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt $(0, 2)$. *[1 punt]*

Solució:

a) Sabem que en $x=-3$ hi ha un extrem relatiu, per tant $f'(-3)=0$.

$f'(x)=x^2+bx-3$ → $f'(-3)=(-3)^2+b(-3)-3=0$ → $9-3b-3=0$ → $\boxed{b=2}$.

Per tant, $f'(x)=x^2+2x-3$. Si estudiem on és positiva i on es negativa la funció $f'(x)$, obtenim que és positiva en els intervals $(-\infty,-3)$ i $(1,+\infty)$, mentre que és negativa en l'interval $(-3,1)$. Per tant, en $x=-3$ hi ha un màxim relatiu.

b) El pendent de la recta buscada serà $f'(0)$. Si $b=-8$, tenim $f'(x)=x^2-8x-3$ $\Rightarrow f'(0)=-3$.

La recta tangent en aquest punt $(0,2)$ serà $y-2=-3(x-0)$, o bé $\boxed{y=-3x+2}$.

6. El vèrtex d'una paràbola és el punt $(1,2)$.
    a. Si la paràbola talla l'eix de les abscisses pel punt $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, quin serà l'altre punt de tall de la paràbola amb l'eix de les abscisses? *[1 punt]*
    b. Trobeu l'equació de la paràbola. *[1 punt]*

Solució:

a) L'altre punt de tall de la paràbola a l'eix d'abscisses és $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, ja que $x = 1$ és l'eix de simetria.

b) L'equació de la paràbola és de la forma $f(x) = a \cdot x^2 + \mathrm{b} \cdot x + \mathrm{c}$. Com que té el vèrtex en el punt $(1,2)$ sabem que d'una banda $a + \mathrm{b} + \mathrm{c} = 2$ i, d'altra banda, la derivada ha de ser igual a zero en aquest punt. Com que $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$ obtenim que $2 \cdot a + b = 0$. També sabem que passa pel punt $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, per tant, $a \cdot \frac{1}{4} - \mathrm{b} \cdot \frac{1}{2} + \mathrm{c} = 0$. Resolent el sistema trobem que $a = -\frac{8}{9}$, $\mathrm{b} = \frac{16}{9}$ i $\mathrm{c} = \frac{10}{9}$.
Per tant, l'equació de la paràbola és $f(x) = -\frac{8}{9} \cdot x^2 + \frac{16}{9} \cdot x + \frac{10}{9}$.

També és correcte l'exercici si primer troben l'equació de la paràbola i després calculen l'altre punt de tall amb l'eix de les abscisses.