4. Un grup inversor vol invertir 6.000 euros en lletres, bons i accions que tenen una rendibilitat del 10%, del 8% i del 4%, respectivament. Tenint en compte que vol obtenir una rendibilitat global del 7%:
    a. Trobeu la quantitat que ha d'invertir en lletres i en bons en funció de la quantitat invertida en accions. Quins valors pot prendre la quantitat invertida en accions sabent que les quantitats invertides en cadascun dels productes han de ser sempre més grans o iguals que zero? *[1 punt]*
    b. Quant ha d’invertir en cadascuna de les tres opcions si vol invertir en lletres tant com en els altres dos productes junts? *[1 punt]*

Solució:

a) Anomenem x els euros invertits en lletres, y els euros invertits en bons i z els invertits en accions. Sabem que aquests productes tindran una rendibilitat del 10%, el 8% i el 4% respectivament. D'altra banda, si volem una rendibilitat global del 7%, tenim que el 7% de 6.000 euros = 420 euros.
Així doncs, tenim el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 6.000 \\ 0,1 \cdot x + 0,08 \cdot y + 0,04 \cdot z = 420 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 10 & 8 & 4 & 42.000 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 0 & 2 & 6 & 18.000 \end{pmatrix}$$

Tenim, per tant, un sistema compatible indeterminat que té per solucions en funció de z: $x = -3.000 + 2z$; $y = 9.000 - 3z$; $z = z$.
Per tal que la inversió no sigui mai negativa cal que

$x \geq 0 \rightarrow z \geq 1.500$; $y \geq 0 \rightarrow z \leq 3.000$; $z \geq 0$

Per tant, la inversió en accions ha d'estar en l'interval [1.500, 3.000].

b) Si addicionalment sabem que hem d'invertir en lletres tant com en els altres dos productes junts. Tenim el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + y + z = 6.000 \\ 0,1 \cdot x + 0,08 \cdot y + 0,04 \cdot z = 420 \\ x = y + z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 10 & 8 & 4 & 18.000 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6.000 \\ 0 & 2 & 6 & 18.000 \\ 0 & 0 & 4 & 12.000 \end{pmatrix}$$

Per tant, la solució del sistema ve donada per $x = 3.000$, que són els euros que hem d'invertir en lletres, $y = 0$, no hem d'invertir res en bons i, finalment, $z = 3.000$, que són els euros que hem d'invertir en accions.

5. Considereu la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

   a. Comproveu que $\mathbf{A}^3 - \mathbf{I} = 0$, en què $\mathbf{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2. *[1 punt]*
   b. Calculeu $\boldsymbol{A}^{11}$ utilitzant la informació de l'apartat a. *[1 punt]*

Solució:

a. Calculem la matriu A^3 i comprovem que efectivament dona la matriu identitat:

$$\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Utilitzant l'apartat anterior tenim que

$$\mathrm{A}^{11} = \mathrm{A}^3 \cdot \mathrm{A}^3 \cdot \mathrm{A}^3 \cdot \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$