

2. Un gimnàs cobra una quota de 42 euros mensuals i té 2000 usuaris. Un estudi de mercat afirma que per cada euro que s'apuja (o s'abaixa) la quota es perden (o es guanyen) 20 usuaris.
- Expresseu el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota, tenint en compte que la relació entre les dues variables és lineal. Per a quin valor de la quota el gimnàs es quedaria sense usuaris? *[1 punt]*
  - Determineu en quin preu cal fixar la quota per obtenir un benefici mensual màxim. Quin seria aquest benefici i quants usuaris tindria el gimnàs en aquest cas? *[1 punt]*

## Solució:

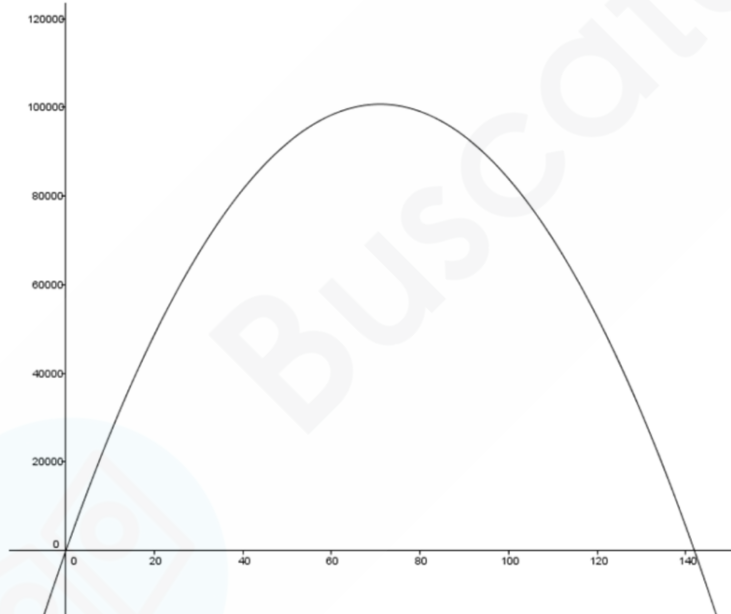
a) Denotem per  $x$  la quota del gimnàs i per  $f(x)$  la funció que dona el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota. Sabem que  $f(x)$  és una funció lineal de pendent  $-20$  i que passa pel punt  $(42, 2.000)$ , d'on es dedueix que  $f(x) = 2.840 - 20x$ . Per saber per a quin valor de quota el gimnàs es quedaria sense usuaris cal resoldre  $f(x) = 0$ , i s'obté  $x = 142$ . És a dir, a partir de 142 euros de quota el gimnàs no tindria cap usuari.

b) La funció que dona el benefici mensual en funció de la quota s'obté multiplicant el nombre d'usuaris per la quota que paguen:

$$B(x) = (2.840 - 20x) \cdot x = -20x^2 + 2.840x.$$

Ara hem de trobar el màxim de  $B(x)$ , que és un polinomi i, per tant, una funció contínua i derivable a tot el seu domini  $[0, \infty)$ . Derivant, obtenim  $B'(x) = -40x + 2.840$ , i igualant la derivada a zero s'obté com a solució  $x = 71$ . Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que  $B'(x) > 0$  quan  $x \in [0, 71)$  i  $B'(x) < 0$  quan  $x > 71$ .

Alternativament es pot representar la paràbola definida per  $B(x)$  i trobar el vèrtex per a obtenir el màxim:



El benefici mensual màxim que s'assoleix quan la quota és de 71 euros és de 100.820 euros i el gimnàs tindria 1.420 usuaris.