1. Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & si\ x\leq -1 \\ ax+b & si\ -1<x<2 \\ x^2 & si\ x\geq 2 \end{cases}$$

Trobeu el valor de *a* i *b* perquè la funció sigui contínua per a tots els nombres reals.
[2 punts]

Solució:

La funció f és contínua en $(-\infty,-1) \cup (-1,2) \cup (2,+\infty)$ independentment del valor de a i b, ja que es tracta d'una funció polinòmica en cadascun dels intervals. Per tant, caldrà imposar que la funció sigui contínua en els punts d'abscissa $x=-1$ i $x=2$.
Per a $x=-1$ tenim que $f(-1)=2(-1)+3=1$. També,

$$\lim_{x\to -1-}(2x+3)=1$$

i, finalment,

$$\lim_{x\to -1+}(ax+b)=-a+b$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x=-1$ si $-a+b=1$.

D'altra banda, per a $x=2$ tenim que $f(2)=2^2=4$. D'una banda,

$$\lim_{x\to 2-}(ax+b)=2a+b$$

i, finalment també,

$$\lim_{x\to 2+}(x^2)=2^2=4.$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x=2$ si $2a+b=4$.

Així doncs, la funció serà contínua en tots els reals si i només si es verifiquen simultàniament les dues condicions trobades, és a dir, si a i b són la solució del sistema següent:

$$\begin{cases}-a+b=1\\2a+b=4\end{cases}$$

Resolem el sistema i trobem que cal que $a=1$ i $b=2$.

6. Sabem que la funció $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ passa pel punt $(2,-5)$ i que les rectes $x=1$ i $y=2$ en són les asímptotes vertical i horitzontal, respectivament. Calculeu *a*, *b* i *c*.
[2 punts]

Solució:

Com que es tracta d'una funció racional, l'asímptota vertical la tindrà en el punt que anul·la el denominador; és a dir, cal que $cx + 1 = 0$ per a $x = 1$, per tant, $c = -1$.

Observem que el $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a}{c}$ i també $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a}{c}$. Per tant, tenim que $\frac{a}{c} = 2$ (l'asímptota horitzontal). Per tant, $a = 2c = -2$.

Finalment, sabem que passa pel punt $(2, -5)$, per tant, $f(2) = -5$, és a dir, $\frac{2a+b}{2c+1} = -5$, i deduïm que $b = 9$.