

4. La despesa mensual en tabac d'un fumador ve determinada pel seu salari mitjançant la funció $f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4}$, en què x representa el salari en milers d'euros i $f(x)$ la despesa mensual en tabac en euros.
- a)** Determineu el salari per al qual la despesa en tabac és màxima. A quant ascendeix aquesta despesa?
[1 punt]
- b)** Per a quins salaris la despesa mensual és inferior a 60€?
[1 punt]

Solució:

- a) Comencem fent la derivada de $f(x)$. Obtenim $f'(x) = \frac{-400x^2+1600}{(x^2+4)^2}$. Igualem a 0 la primera derivada per trobar els punts crítics i ens dona un salari de $x = 2$ (milers d'euros) i $x = -2$, que, pel context del problema, no té sentit. Per justificar que en $x = 2$ tenim un màxim, prenem un punt entre -2 i 2 , per exemple $x = 0$ i veiem que la derivada és positiva, per tant, la funció és creixent. Mentre que per a punts més grans que 2 , per exemple $x = 3$, la derivada és negativa, és a dir, la funció és decreixent. Per tant, en $x = 2$ hi ha un màxim. La despesa màxima serà de $f(2) = 100$ euros.
- b) Hem de resoldre la inequació $f(x) < 60$, és a dir, $\frac{400x}{x^2+4} < 60$, que és equivalent a $400x < 60x^2 + 240$, o bé, dividint cada terme per 20,

$$0 < 3x^2 - 20x + 12$$

Si trobem les arrels de la paràbola $y = 3x^2 - 20x + 12$, obtenim $x = \frac{2}{3}$ i $x = 6$. Aquesta paràbola és negativa a l'interval $(\frac{2}{3}, 6)$ i és positiva als intervals que són la solució d'aquest apartat: $(0, \frac{2}{3}) \cup (6, +\infty)$. Hem tingut en compte que, pel context del problema, $x \geq 0$. Per tant, la despesa mensual en tabac és inferior a 60 € si el salari és inferior a 666,67 € o si és superior a 6.000 €.