**3.** Es preveu un canvi important en la població d'una determinada zona per qüestions mediambientals. El nombre d'habitants de la zona, en milions, vindrà donat per la funció $P(t) = \frac{t^2+28}{(t+2)^2}$, en què $t$ mesura el temps en anys des del moment actual ($t$ = 0).

***a)*** Digueu quin és el nombre d'habitants de la zona actualment i quin serà aquest nombre a molt llarg termini. [1 punt]

***b)*** En quin moment s'arribarà al nombre mínim d'habitants? Quants habitants hi haurà en aquell moment? Quin és el nombre màxim d'habitants que s'assoleix en aquesta zona? [1 punt]

# Solució:

a) Es demana la població quan $t = 0$, és a dir, $P(0) = \frac{28}{(2)^2} = 7$. Per tant, la població actual és de 7 milions d'habitants. Pel que fa a la població a molt llarg termini, hem de calcular el límit següent:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2} = 1.$$

Per tant, a molt llarg termini la població de la zona tendirà a 1 milió d'habitants.

b) Cal estudiar el signe de la funció derivada per trobar els màxims i mínims de la funció. Comencem calculant la derivada:

$$P'(t) = \frac{2t \cdot (t + 2)^2 - (t^2 + 28) \cdot 2 \cdot (t + 2)}{(t + 2)^4} = \frac{4 \cdot (t - 14)}{(t + 2)^3}.$$

Si imposem que $P'(t) = 0$ obtenim $t = 14$. Estudiem, a continuació, la monotonia de la funció per valors de $t \geq 0$:

| | $[0,14)$ | 14 | $(14, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $P'(t)$ | <0 | 0 | >0 |
| $P(t)$ | ↓ | Mínim | ↑ |

Per tant, al cap de 14 anys la població assolirà el seu mínim i serà de

$$P(14) = \frac{14^2 + 28}{(14 + 2)^2} = 0.875.$$

És a dir, al cap de 14 anys hi haurà 875.000 habitants.

Per a l'estudi de la monotonia de la funció, i tenint en compte que en el límit la població tendeix de forma creixent cap a 1, observem que el màxim nombre d'habitants correspon al moment actual ($t = 0$) i és de 7 milions d'habitants.

**5.** Considereu una funció $f(x)$ que té com a primera derivada $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.

***a)*** Determineu el valor de $b$ perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -1$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. [1 punt]

***b)*** Si sabem que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(0, 3)$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en aquest punt. [1 punt]

## Solució:

a) Sabem que en $x = -1$ hi ha un extrem relatiu; per tant, $f'(-1) = 0$. D'altra banda, $f'(-1) = 2 - b + 4 = -b + 6$, i, conseqüentment, trobem que $b = 6$.
Per tant, tenim que $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$. Si estudiem on és positiva i on es negativa la funció $f'(x)$, obtenim que és positiva en els intervals $(-\infty, -2)$ i $(-1, +\infty)$, mentre que és negativa en l'interval $(-2, -1)$. Per tant, en $x = -1$ hi ha un mínim relatiu.
b) El pendent de la recta buscada és $f'(0)$. Sabem que $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$ i, per tant, $f'(0) = 4$.
La recta tangent en el punt (0,3) és $y - 3 = 4(x - 0)$, és a dir, $y = 4x + 3$.