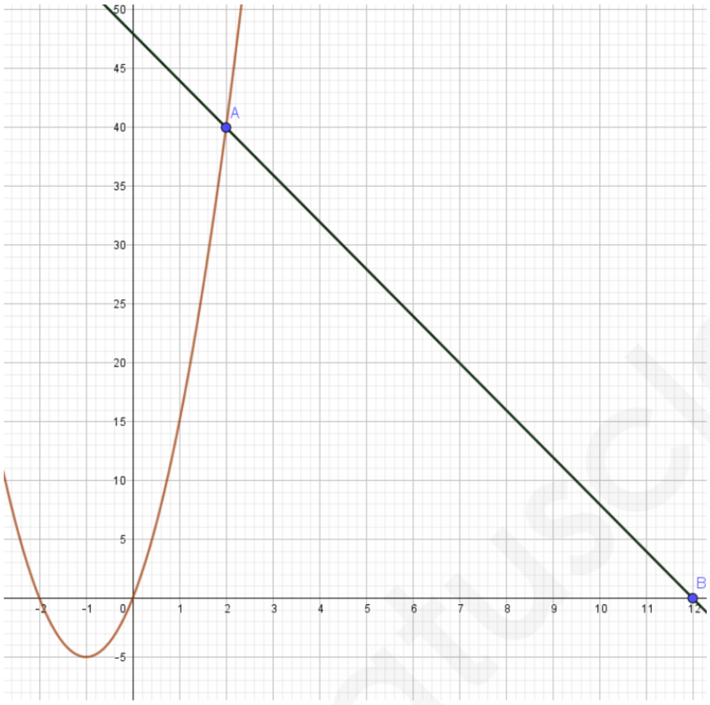
2. Un fabricant va tenir un producte a la venda durant deu anys. Durant aquest temps, el preu del producte P, en euros, va estar relacionat amb el temps que feia que estava a la venda t, expressat en anys, seguint la funció següent:

$$P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & si\ 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & si\ 2 < t \leq 10 \end{cases}$$

a) Indiqueu els intervals de creixement i de decreixement del preu del producte durant aquests deu anys. *[1,25 punts]*
b) Trobeu el preu màxim que va assolir el producte durant el temps que va estar a la venda i calculeu la taxa de variació mitjana del preu del producte durant els darrers cinc anys que va estar a la venda. *[1,25 punts]*

Solució:

a) Si es fa una representació gràfica de la funció, tenim que



Observem que en $[0,2]$ la funció $P(t)$ té l'expressió d'una funció quadràtica $P_1(t) = 5t^2 + 10t$, la seva derivada és $P_1'(t) = 10t + 10$, que s'anul·la en $t = -1$, fora de l'interval $[0,2]$. Comprovem que en l'interval $[0,2]$, la derivada de la funció $P_1(t)$ és positiva i, per tant, en $[0,2]$ la funció $P(t)$ és creixent.

En $(2,10]$ la funció $P(t)$ té l'expressió d'una funció lineal $P_2(t) = -4t + 48$. Com que la seva derivada és $P_2'(t) = -4$ la funció $P_2(t)$ és sempre decreixent i en particular en l'interval demanat.

Per tant, $P(t)$ és creixent en $[0,2)$ i és decreixent en $(2,10]$.

b) Pel que hem vist en l'apartat anterior, el valor màxim de $P(t)$ en $[0,10]$ s'assoleix en $x = 2$ i el valor de la funció en aquest punt és $P(2) = 40$ euros.

Finalment, la taxa de variació mitjana dels darrers 5 anys és $TVM(5,10) = \frac{P(10)-P(5)}{10-5} = \frac{8-28}{5} = -4$ euros.

4. Considerem les funcions $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = -x^2 + c$.

   a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c per tal que les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$ es tallin en els punts $(-1, 3)$ i $(3, -5)$. *[1,25 punts]*

   b) Per a $c = 4$, trobeu l'equació de la recta tangent a $g(x)$ en el punt d'abscissa $x = -1$. *[1,25 punts]*

Solució:

a) Imposem que les dues funcions passin per aquests dos punts. Cal que $f(-1) = 3$, $f(3) = -5$ i que $g(-1) = 3$ i $g(3) = -5$.

De les dues igualtats primeres tenim que

$$\begin{cases} 1 - a + b = 3 \\ 9 + 3a + b = -5 \end{cases}$$

I, resolent el sistema, trobem que $a = -4$ i $b = -2$.

De les igualtats de la funció g, tenim que

$$\begin{cases} -1 + c = 3 \\ -9 + c = -5 \end{cases}$$

b) Considerem ara $g(x) = -x^2 + 4$. Observem que $g(-1) = 3$, per tant, la recta tangent a $g(x)$ en $x = -1$ passa pel punt $(-1,3)$.

El pendent de la recta tangent serà $m = g'(-1)$ on g' és la derivada de la funció g. Comencem calculant la derivada:

$$g'(x) = -2x$$

I, per tant, $g'(-1) = 2$.

Així doncs, l'equació de la recta tangent a $g(x)$ en $x = -1$ és $y - 3 = 2(x + 1)$, és a dir, $y = 2x + 5$.