

1. Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudieu per a quins valors de x la matriu inversa de la matriu A coincideix amb la seva oposada, és a dir, $A^{-1} = -A$. [2,5 punts]

Buscatusclases

Solució:

Hem de trobar els valors de x per als quals es compleix que $A^{-1} = -A$.

D'una banda, $-A = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$.

D'altra banda, sabem que $A \cdot A^{-1} = I$, on I és la matriu identitat d'ordre 2. Per tant, hem de trobar els valors de x per als quals es compleix:

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comencem fent el primer producte:

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 + 10 & 0 \\ 0 & -x^2 + 10 \end{pmatrix}.$$

Com que sabem que

$$\begin{pmatrix} -x^2 + 10 & 0 \\ 0 & -x^2 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hem de resoldre l'equació $-x^2 + 10 = 1$, que té per solucions $x = -3$ i $x = 3$.

5. Un triatló consta de tres segments que cal realitzar practicant tres modalitats d'esport diferents: natació, ciclisme i cursa a peu. La distància total que es recorrerà en el triatló és de 75 km. Sabem que el recorregut en bicicleta és igual a quatre vegades la distància que cal recórrer nedant i corrent conjuntament. Sabem també que si sumem 3 km a la distància que es fa corrent ens dona el mateix que cinc vegades el recorregut que es fa nedant. Determineu la distància recorreguda en cada modalitat. *[2,5 punts]*

Buscatusclases



Solució:

Anomenem x , y i z les distàncies recorregudes nedant, corrent i en bicicleta, respectivament.

Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 75 \\ z = 4(x + y) \\ y + 3 = 5x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 75 \\ 4x + 4y - z = 0 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

El resollem utilitzant el mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 0 & 0 & -5 & -300 \\ 0 & -6 & -5 & -372 \end{pmatrix}$$

I obtenim $x = 3$, $y = 12$ i $z = 60$.

És a dir, les distàncies que cal recórrer són 3 km nedant, 12 km corrent i 60 km en bicicleta.