

6. La funció $Q(x) = (x + 1)^2(32 - x)$, en què $x \in [-1, 32]$, representa la producció, en quilograms, d'una hortalissa en un hivernacle en funció de la temperatura x , expressada en graus centígrads ($^{\circ}\text{C}$), que pot variar entre -1°C i 32°C .
- a) Calculeu quina és la temperatura de l'hivernacle amb la qual s'obté la màxima producció. Quina producció d'hortalissa obtindrem a aquesta temperatura? [1,25 punts]
- b) Calculeu a quines temperatures s'assoleix el nivell mínim de producció i quin és aquest valor mínim. [1,25 punts]

Solució:

- a) Cal determinar el valor de x per al qual la funció $Q(x)$ té un màxim en l'interval $[-1,32]$. Observem que:

$$Q(x) = (x + 1)^2(32 - x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 32$$

Comencem calculant la derivada:

$$Q'(x) = -3x^2 + 60x + 63$$

Si igualem la derivada a zero, $-3x^2 + 60x + 63 = 0$ obtenim que la derivada s'anul·la en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 21$.

Per saber si en aquests punts hi ha un màxim o un mínim locals, estudiem el signe de la derivada. Observem que la derivada $Q'(x)$ és negativa per a $x < -1$ (a nosaltres només ens interessa en l'interval $[-1,32]$ però, com a funció polinòmica, $(x + 1)^2(32 - x)$, està ben definida per a tot valor de x i ens serveix per a estudiar el seu comportament). D'altra banda, $Q'(x)$ és positiva en l'interval $(-1,21)$ i torna a ser negativa per a $x > 21$. Per tant, en $x = -1$ hi ha un mínim local i en $x = 21$ hi ha un màxim local. Tenint en compte el comportament de la funció en l'interval $[-1,32]$ aquest màxim local és també el màxim en aquest interval.

Així doncs, la temperatura òptima per a mantenir l'hivernacle és de 21°C .

A aquesta temperatura, la producció serà de:

$$Q(21) = -21^3 + 30 \cdot 21^2 + 63 \cdot 21 + 32 = 5.324 \text{ kg.}$$

- b) La funció $(x + 1)^2(32 - x)$ té un mínim local en $x = -1^\circ\text{C}$, que correspon a una producció de $Q(-1) = 0$. Com que la funció és decreixent per $x > 21$, hem de comprovar el valor de la funció en l'extrem superior de l'interval on la tenim definida per saber si aquest mínim local és també el mínim global que estem buscant. Observem que $Q(32) = 0$.

Per tant, tant a una temperatura de -1°C com a una temperatura de 32°C , no s'obtindrà cap producció.