4. La funció $C(t)=3-\dfrac{1}{t^2-4t+5}$, en què t són els anys transcorreguts i $C(t)$ la quantitat de clients, expressada en milers, modelitza l'evolució d'una empresa que ha entrat en crisi.

a) Calculeu quants clients tenia l'empresa en el moment inicial i quants en tenia al cap d'un any.
[0,5 punts]

b) Trobeu l'instant en què l'empresa deixa de perdre clients i calculeu quants clients té en aquell instant.
[1 punt]

c) Calculeu quant temps haurà de passar perquè l'empresa aconsegueixi tenir de nou el mateix nombre de clients que en el moment d'iniciar l'estudi.
[1 punt]

Solució:

a) En el moment inicial tenia $C(0) = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5} = 2{,}8$ milers de clients. Al cap d'un any tindrà $C(1) = 3 - \frac{1}{1-4+5} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ milers de clients.

b) Observem que la funció $C(t)$ està definida per tot valor real t (ja que el denominador $t^2 - 4t + 5$ no s'anul·la mai) i que, per la naturalesa del problema, té sentit per a tot $t \geq 0$. Calculem la derivada :
$C'(t) = \frac{2t-4}{(t^2-4t+5)^2}$. Si igualem la derivada a zero, $\frac{2t-4}{(t^2-4t+5)^2} = 0$, obtenim que $t = 2$, que correspon a l'instant en el qual hi ha una quantitat de clients de $C(2) = 3 - \frac{1}{4-8+5} = 2$ milers.

És fàcil veure què aquest valor correspon a un mínim observant que la derivada canvia de signe en $t = 2$, passant de negativa a positiva. Per tant, desprès de 2 anys l'empresa tindrà 2.000 clients i començarà a remuntar.

c) Hem de resoldre l'equació

$$3 - \frac{1}{t^2 - 4t + 5} = \frac{14}{5}$$

Tenim que
$\frac{1}{5} = \frac{1}{t^2-4t+5}$, per tant, $t^2 - 4t + 5 = 5$, i simplificant obtenim $t^2 - 4t = 0$, d'on obtenim les solucions $t = 0$ que correspon a l'instant en què s'inicia l'estudi i $t = 4$ que representa el moment en què tornen a tenir els 2.800 clients de l'inici de l'estudi. Per tant, hauran de passar 4 anys per tenir de nou el mateix nombre de clients.

6. Considereu la funció $f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18$.

a) Calculeu quin ha de ser el valor del paràmetre p perquè les rectes tangents a la corba en els punts d'abscisses $x = 1$ i $x = 3$ siguin paral·leles.
[1,25 punts]

b) Escriviu l'equació de la recta tangent al punt d'abscissa $x = 3$ per al valor de $p = 2$.
[1,25 punts]

Solució:

a) Calculem la funció derivada: $f'(x) = 3px^2 - 8x + 7p$. Perquè les rectes siguin paral·leles cal que tinguin el mateix pendent. D'una banda, el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $f'(1) = 3p - 8 + 7p = 10p - 8$. D'altra banda, el pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 3$ és $f'(3) = 27p - 24 + 7p = 34p - 24$.

Si igualem les expressions dels dos pendents obtenim $10p - 8 = 34p - 24$ i obtenim que, perquè siguin iguals, cal que $p = \frac{2}{3}$.

b) L'equació tangent és de la forma:

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

L'ordenada corresponent al punt d'abscissa $x_0 = 3$ és

$$y_0 = f(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 7 \cdot 2 \cdot 3 - 18 = 42$$

El pendent ve donat per

$$m = f'(3) = 3 \cdot 2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 44$$

I, per tant, l'equació de la recta tangent que busquem és $y - 42 = 44(x - 3)$, és a dir, $y = 44x - 90$.