1. La taula següent mostra els ingressos, en milers d'euros, d'una botiga que disposa de tres locals, durant els mesos de gener, febrer i març de 2020.

	Gener	*Febrer*	*Març*
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Hem recollit la informació anterior en la matriu $\boldsymbol{A}$, en què cada fila indica un local i cada columna el mes corresponent:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix}.$$

***a*)** Considereu els vectors $\boldsymbol{v} = (1 \quad 1 \quad 1)$ i $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Feu les operacions $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{w}$. Interpreteu en cada cas el resultat obtingut.
[1,25 punts]

***b*)** La matriu $\boldsymbol{B}$ recull els resultats del trimestre següent, és a dir, els ingressos corresponents als mesos d'abril, maig i juny de 2020:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix}.$$

Desconeixem la dada corresponent al mes de juny del local 3, que hem denominat x, però sabem que el rang de la matriu $\boldsymbol{B}$ és 2. Trobeu el valor de x.
[1,25 punts]

Solució:

a) Fem el producte de $v \cdot A$.

$$v \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39{,}5 & 39{,}7 & 10{,}7 \end{pmatrix}$$

El vector resultant correspon als ingressos totals en milers d'euros del conjunt dels tres locals en els mesos de gener, febrer i març de 2020 respectivament.

D'altra banda,

$$A \cdot w = \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30{,}9 \\ 27{,}3 \\ 31{,}7 \end{pmatrix}$$

i en cada fila hi ha els ingressos totals durant els 3 mesos de cada un dels locals, en milers d'euros.

b) Per calcular el rang de la matriu *B* diagonalitzarem seguint el mètode de Gauss. En el primer pas substituïm la fila 2, F2, per F2-F1, on F1 denota la fila 1, i la fila 3, F3, per F3-2·F1. En el segon pas substituïm F3 per F3+F2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x-8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-7 \end{pmatrix}$$

Per tant, perquè la matriu B tingui rang 2 cal que $x = 7$.

2. La Filomena fa una festa i convida els amics a menjar un pastís. Ha anat a la botiga i ha comprat una dotzena d'ous, una bossa de farina d'ametlla i un paquet de sucre morè. La festa ha estat un èxit i decideix repetir la trobada i tornar a fer el pastís. Torna a la botiga i compra una altra dotzena d'ous i dues bosses de farina d'ametlla. Però un cop a casa s'adona que no té gens de sucre. Torna a la botiga i compra un paquet de sucre morè i també una altra dotzena d'ous. La primera compra li va costar 6 €, la segona 6,5 € i la darrera 3,5 €.

a) Plantegeu un sistema d'equacions amb les dades del problema.
[0,75 punts]

b) Calculeu el preu d'una dotzena d'ous, el d'una bossa de farina d'ametlla i el d'un paquet de sucre morè.
[1,75 punts]

Solució:

a) Si definim les incògnites x, y i z com el preu d'una dotzena d'ous, d'una bossa de farina d'ametlla i d'un paquet de sucre morè, respectivament, obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y = 6{,}5 \\ x + z = 3{,}5 \end{cases}$$

b) El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 6{,}5 \\ 1 & 0 & 1 & 3{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Obtenim, per tant, $x = 1{,}5$, $y = 2{,}5$ i $z = 2$. Per tant, la dotzena d'ous costa 1,5 €, la bossa de farina d'ametlla 2,5 € i el paquet de sucre morè 2 €.