5. Una empresa posa a la venda un producte que distribueix en caixes. El benefici B obtingut per l'empresa, expressat en milers d'euros, és donat per l'expressió $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, en què $x > 0$ és el preu de venda de cada caixa, expressat en euros.

a) Quin benefici obtindrà si el preu de venda de cada caixa és de 6 euros? Entre quins valors cal fixar el preu de venda d'una caixa per a obtenir beneficis?
[1,25 punts]

b) A quin preu ha de vendre cada caixa perquè el benefici sigui el més gran possible? Quin és aquest benefici màxim?
[1,25 punts]

Solució:

a) El benefici obtingut si les caixes es venen a 6 euros és de $B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = -36 + 96 - 55 = 5$ milers d'euros.

Els valors per als quals hi haurà beneficis són els valors de x per als quals $B(x) > 0$. Hem de resoldre, per tant, la inequació $-x^2 + 16x - 55 > 0$.
Comencem resolent l'equació $-x^2 + 16x - 55 = 0$. $x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 55}}{-2} = \frac{16 \pm 6}{2}$. Que té per solucions $x = 11$ i $x = 5$. Observem que $B(x) > 0$ si $x \in (5,11)$. Per tant, per què l'empresa tingui beneficis, cal que el preu de la caixa estigui entre 5 i 11 euros.

b) Si derivem la funció obtenim $B'(x) = -2x + 16$. Igualant a zero obtenim que hi ha un extrem relatiu en $x = 8$. Es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors de $x < 8$ i, per tant, la funció és creixent, mentre que és negativa per a valors de $x > 8$ i, per tant, la funció és decreixent.

Per tant, l'empresa obté el benefici màxim si ven cada caixa a 8 euros i el benefici que obté és de $B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$ milers d'euros.