3. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - k}$, en què k és un paràmetre real diferent de 0. Per als diferents valors del paràmetre k:

a) Calculeu el domini i les asímptotes de la funció.
[1 punt]

b) Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu.
[1 punt]

Solució:

a)

La resposta depèn del signe de k.

- Si $k < 0$, aleshores $x^2 - k > 0$ per a qualsevol valor de x i, per tant, $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}}$ i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$ és contínua perquè no s'anul·la el denominador i $\boxed{\text{no té cap asímptota vertical}}$.
  Com que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-k} = 0$, la funció $\boxed{\text{té una asímptota horitzontal en l'eix de les } x\text{, y=0}}$.
- Si $k > 0$ aleshores $x^2 - k$ s'anul·la per als valors $\pm\sqrt{k}$ i, per tant, $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}\text{-}\{\pm\sqrt{k}\}}$ i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$ $\boxed{\text{tindrà dues asímptotes verticals, en } x = +\sqrt{k} \text{ i en } x = -\sqrt{k}}$.
  Com que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-k} = 0$, la funció $\boxed{\text{té una asímptota horitzontal en l'eix de les } x\text{, y=0}}$.

b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-k)^2} = 0$ si $x = 0$, amb independència del valor de k.

$$f''(x) = \frac{(-2)(x^2-k)^2 - (-2x)2(x^2-k)2x}{(x^2-k)^4} = \frac{(-2)(x^2-k) + 8x^2}{(x^2-k)^3} = \frac{6x^2+2k}{(x^2-k)^3}$$

Com que $f''(0) = \frac{-2}{k^2} < 0$,

$\boxed{f\text{, per tant, té un màxim relatiu en el punt } \left(0, \frac{-1}{k}\right) \text{ i no té mínims relatius.}}$

<u>Observació:</u> En lloc de fer servir el signe de la derivada segona també es pot veure el creixement o decreixement de la funció f a l'entorn de $x = 0$.

3. Responeu a les qüestions següents:

***a*)** Comproveu que la recta tangent a la corba $y = x^2$ en el punt d'abscissa $x = 2$ és la recta $y = 4x - 4$ i calculeu els punts d'intersecció d'aquesta recta amb els eixos de coordenades.

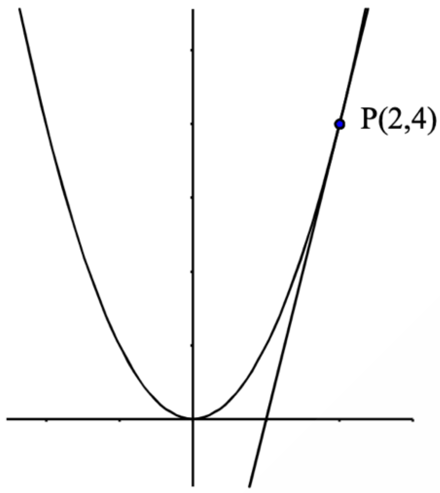
[1 punt]

***b*)** Calculeu l'àrea limitada per la corba de l'apartat anterior, la recta tangent en $x = 2$ i l'eix de les abscisses.

[1 punt]

Solució:

a)



Trobem el punt de tangència: P(2,4).

El pendent de la tangent és la derivada, per tant:

$f(x)=x^2$

$f'(x)=2x$ i $f'(2)=4$

La recta tangent és doncs: $y-4=4(x-2)$, o sigui $y=4x-4$.

Els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades els trobem quan x = 0 que obtenim y = -4 i quan y = 0 que obtenim x = 1. Així doncs els punts intersecció són $\boxed{(0,-4)}$ i $\boxed{(1,0)}$.

b) L'àrea de la regió es pot obtenir:

$$\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\left(x^2-(4x-4)\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left.\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-8+8-\frac{1}{3}+2-4=\boxed{\frac{2}{3}u^2}.$$