1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre λ el sistema és incompatible.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $\lambda = 1$.
[1 punt]

Solució:

a)

Estudieu per a quins valors de λ el sistema és incompatible.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5\lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(5\lambda+5) = 5\lambda(\lambda+1)$$

<u>CAS I: Si $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$</u>

$Rang\ M = Rang\ \overline{M} = núm.incòg = 3$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, en aquest cas el sistema és *compatible determinat*.

<u>CAS II: Si $\lambda = 0$</u>

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad Rang\ M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Rang\ \overline{M} = 3$$

$Rang\ M \neq Rang\ \overline{M}$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, el sistema és *incompatible*.

<u>CAS III: $\lambda = -1$</u>

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad Rang\ M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 120 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Rang\ \overline{M} = 3$$

$Rang\ M = 2 \qquad Rang\ \overline{M} = 3$

$Rang\ M \neq Rang\ \overline{M}$

En virtut del teorema de Rouché-Frobënius, el sistema és *incompatible*.

El sistema és incompatible per a dos valors del paràmetre λ: $\lambda = 0$ i $\lambda = -1$.

b) Resoleu el sistema per a $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ y+z &= 10 \\ 2x-y+5z &= 30 \end{cases}$$

En aquest cas el sistema és compatible determinat, té una única solució i el sistema es pot resoldre per qualsevol mètode conegut, per exemple, pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 30 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array}\right)$$

De la tercera equació, tenim $10z = 60$, per tant, $z = 6$.
De la segona equació, tenim y+$z = 10$, per tant, $y = 4$.
De la primera equació, tenim $x + y - z = 0$, per tant, $x = 2$.

$\boxed{\text{Solució: } (x = 2 \;,\; y = 4 \;,\; z = 6).}$

4. Sabem que el sistema d'equacions lineals següent té una única solució:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

a) Comproveu que $a \neq 0$.
[1 punt]

b) Trobeu la solució del sistema en funció del paràmetre a.
[1 punt]

Solució:

a)

Perquè tingui solució única caldrà que el sistema sigui compatible i determinat; és a dir, que rangM=rangM'=3

amb $(M|M') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2a$$

Per tal que rangM=3 cal que Det M $\neq 0 \quad \Leftrightarrow a \neq 0$

Això vol dir que el sistema és compatible i determinat sempre que $a \neq 0$

b) Per Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{a^3 - 2a}{-2a} = \frac{2-a^2}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1-a^2-1}{-2a} = \frac{a}{2} \quad \text{i}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1-1-a^2}{-2a} = \frac{a}{2}$$

Per tant, la solució del sistema (en funció del paràmetre *a*) és: $\boxed{\left(\frac{2-a^2}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}$

5. Considereu les matrius quadrades d'ordre 2 de la forma $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, amb x i y nombres reals.

a) Comproveu que la matriu $\boldsymbol{M}$ és sempre invertible, independentment dels valors de x i de y.
[1 punt]

b) Per a $x = 1$ i $y = -1$, calculeu $\boldsymbol{M}^{-1}$.
[1 punt]

Solució:

5.

a)

Per a comprovar que una matriu $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$ és invertible és suficient comprovar que el seu determinant és sempre diferent de 0.

Efectivament, $|M| = x^2 - (-1)(y^2+1) = x^2 + y^2 + 1$, que és sempre diferent de 0, ja que $x^2 + y^2 \geq 0$ en ser suma de dos quadrats, independentment del valor que tinguin les variables x i y.

b) Per a $x = 1$ i $y = -1$, tenim $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Tindrem $M^{-1} = \frac{1}{|M|}(AdjM)^t = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

en què k és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors de k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k = -2$.
[1 punt]

Solució:

2.

a)

Fem Gauss prenent les variables en l'ordre donat $x, y, z,$ i obtenim les matrius

$$M|MA = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Substituïm la segona fila (F2) per F2-2·F1 i la tercera fila F3 per F3-F1, on F1 denota la primera fila. Tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 & k^2-4 \end{array}\right)$$

Ara és n'hi ha prou d'intercanviar les columnes 2 o 3 per tenir la matriu diagonalitzada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k^2-4 \end{array}\right)$$

i podem passar a la discussió:

- Per $k \neq 2$ i $k \neq -2$ tenim $rang\ M = rang\ MA = núm. incog. = 3$ i per tant és un sistema compatible determinat.
- Per $k = 2$ tenim $rang\ M = 2$ i $rang\ MA = núm. incog. = 3$ i per tant es tracta d'un sistema incompatible.
- Per $k = -2$ tenim $rang\ M = rang\ MA = 2$ i per tant és un sistema compatible indeterminat amb 3-2 = 1 grau de llibertat.

Nota: Anàlogament, es pot discutir el rang *M* a partir del determinant de la matriu. $|M| = 4 - k^2$ o del menor una vegada aplicat el primer pas de Gauss, amb la igualtat $\begin{vmatrix} 2 & k-2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, que condueix igualment als valors $k = 2$ i $k = -2$, per a organitzar la discussió. En qualsevol cas, la resolució correcta serà puntuada amb 1 punt.

b)

Ja hem vist que per $k = -2$ tenim un sistema compatible indeterminat i fent servir els càlculs de l'apartat anterior sabem que el sistema és equivalent a:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Triant z com a paràmetre, s'obté $y = 2z + \frac{1}{2}$ i $x = y - z = z + \frac{1}{2}$ d'on la solució és

$$\boxed{(x, y, z) = (z + \frac{1}{2}, 2z + \frac{1}{2}, z)}$$

O alternativament

$$\boxed{(x, y, z) = \left(x, 2x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right)}$$

o

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{2y+1}{4}, y, \frac{2y-1}{4}\right)}$$

4. Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu les potències $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$ i $\boldsymbol{A}^6$.
[1 punt]

b) Calculeu la inversa de la matriu $\boldsymbol{A}^5$.
[1 punt]

Solució:

a)

$$A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}= -Id$$

$A^6=A^3\cdot A^3=(-Id)(-Id)=Id.$

b) Com que $Id = A^6 = A\cdot A^5$ aleshores la matriu inversa de A^5 és A.

5. Sigui $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals.

***a*)** Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre a, i interpreteu el resultat geomètricament.
[1 punt]

***b*)** Per a $a = 1$ trobeu la forma paramètrica del pla solució i doneu un punt i dos vectors directors d'aquest pla.
[1 punt]

Solució:

a)

Fem el determinant de la matriu dels coeficients: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2 \cdot (a+2)$

✓ $\boxed{\text{Si } a \neq 1 \text{ i } a \neq -2}$ per Rouché-Frobenius, rang(A) = rang(A/b) = nombre d'incògnites = 3

$\boxed{\text{Sistema compatible determinat, una sola solució, un punt. Els tres plans són secants i es tallen en un punt.}}$

✓ $\boxed{\text{Si } a = 1}$ $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rang(A) = rang(A/b) = 1 < 3 = nombre d'incògnites, llavors $\boxed{\text{és un sistema compatible indeterminat amb dues variables lliures.}}$ $\boxed{\text{Els tres plans coincideixen.}}$

✓ $\boxed{\text{Si } a = -2}$

$$\rightarrow (A|b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Llavors és un sistema incompatible. Es tracta per tant de tres plans que no tenen cap punt comú a tots tres. Com que tots els menors d'}A\text{ d'ordre 2 són diferents de 0, cada dos plans es tallen en una recta que queda paral·lela (no continguda) al tercer pla.}}$

b) El sistema és compatible indeterminat quan $a = 1 \rightarrow$ $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

ens queda el pla: $x + y + z = 1$, que en forma paramètrica serà: $\boxed{\pi: \begin{cases} x = 1 - t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}}$.

Un punt del pla és $\boxed{P_\pi = (1,0,0)}$ i dos vectors directors: $\boxed{v_1 = (-1, 1, 0)}$ i $\boxed{v_2 = (-1, 0, 1)}$