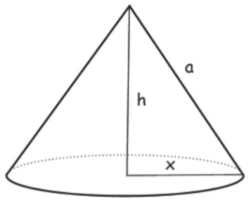
6. Considereu un con de $120\,\text{cm}^3$ de volum que té una altura h, un radi de la base x i una aresta a, com el de la figura següent:



a) Comproveu que $a^2 = \dfrac{360}{\pi} \cdot \dfrac{1}{h} + h^2$.
[1 punt]

b) Calculeu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.
[1 punt]

Nota: Recordeu que el volum del con és un terç del volum del cilindre recte que té la mateixa base i la mateixa altura que el con.

Solució:

6.

a)

Pel teorema de Pitàgores sabem que $a^2 = x^2 + h^2$. Com que el volum del con val 120 cm^3, per la fórmula del volum tenim

$$120 = \frac{\pi \cdot x^2 \cdot h}{3}$$

i aïllant, obtenim $x^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h}$. Substituint x^2 a l'expressió inicial, s'obté la fórmula buscada.

b) La longitud de l'aresta és una funció positiva i tenim la longitud al quadrat expressada com a funció de h, per tant és suficient amb trobar els mínims de la funció

$$f(h) = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$$

quan $h \in (0, \infty)$. Tenim

$$f'(h) = 2h - \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$$

per tant, en igualar $F'(h) = 0$, s'obté $2h = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$, $h^3 = \frac{180}{\pi}$ i $\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \simeq 3{,}86 \text{ cm}}$.

Es comprova que és un mínim, ja que $f'(x) < 0$ quan $x \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\right)$ i $f'(x) > 0$ quan $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}, \infty\right)$.

Alternativament, es pot treballar amb la funció

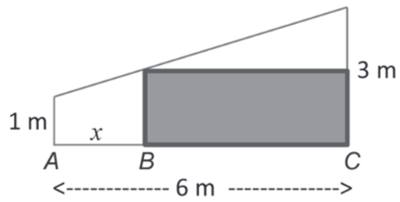
$$a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}$$

i s'obté com a derivada

$$a'(h) = \frac{h - \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}}{\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}}$$

El desenvolupament del problema és el mateix a partir d'aquí.

6. El croquis de sota representa la paret d'unes golfes amb el sostre inclinat, en la qual es vol construir un armari rectangular com el de la zona ombrejada.



a) Expresseu l'àrea del rectangle en funció de la longitud x del segment AB.
[1 punt]

b) Determineu les dimensions del rectangle si volem que tingui una superfície màxima i calculeu aquesta superfície màxima.
[1 punt]

Solució:

a)

La base del rectangle és 6-*x.*

Per a calcular l'alçada del rectangle calculem primer l'equació de la recta que fa de sostre inclinat. Si pensem l'origen (0,0) en el punt A, la recta és la que passa pels punts (0, 1) i (6, 3). Té per tant pendent (3-1)/(6-0) = 2/6 = 1/3 i serà de la forma *y* = (1/3) *x* + *n* i si ha de passar pel punt (0, 1), *n* ha de valer 1. Així doncs l'alçada és (1/3) *x* +1

Per tant l'àrea del rectangle és $A(x) = (6-x)\cdot\left(\frac{1}{3}x+1\right) = \boxed{-\frac{1}{3}x^2+x+6}$.

<u>Nota</u>: Els càlculs per a l'equació del sostre per a determinar l'alçada de l'armari també es poden resoldre per semblança de triangles. Es puntuarà de forma anàloga.

b) Per a maximitzar la funció $A(x)$ mirem en quin punt s'anul·la la derivada.

$$A'(x) = -\frac{2}{3}x+1$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

I com que *A''*(*x*) = -2/3 < 0 en $\boxed{x = 3/2 \text{ hi ha un màxim relatiu}}$

Per tant les dimensions del rectangle seran $6-\frac{3}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$ de base i $\frac{1}{3}\frac{3}{2}+1 = \boxed{\frac{3}{2}}$ d'alçada.

L'àrea màxima serà $A\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2} = \boxed{\frac{27}{4}\,u^2}$.