2. Considereu els plans π_1: $5x - y - 7z = 1$ i π_2: $2x + 3y + z = 5$.

a) Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per l'origen de coordenades i és perpendicular als plans π_1 i π_2.
[1 punt]

b) Calculeu l'angle que formen els plans π_1 i π_2.
[1 punt]

Solució:

a)
Si el pla ha de ser perpendicular als dos plans π_1 i π_2, aleshores el seu vector normal, $n = (A, B, C)$ haurà de ser perpendicular als respectius vectors normals $n_1 = (5, -1, -7)$ i $n_2 = (2, 3, 1)$.

Així doncs $n = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & 5 & 2 \\ j & -1 & 3 \\ k & -7 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19,\ 17)$.

El pla tindrà la forma $20x - 19y + 17z = D$, però si ha de passar per l'origen de coordenades (0,0,0), aleshores D = 0 i el pla buscat serà $\boxed{20x - 19y + 17z = 0}$.

b) L'angle entre els dos plans serà l'angle que formin els respectius vectors normals. Així doncs:

$$\boxed{\alpha} = \alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(n_1, n_2) = \alpha\big((5, -1, -7), (2,3,1)\big) = arccos\frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} =$$
$$= arccos\frac{10 - 3 - 7}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = arc\cos 0 = \boxed{90° = \frac{\pi}{2} rad}.$$

Els dos plans són perpendiculars.

1. Siguin les rectes de $\mathbb{R}^3$ $r: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ i $s: x + 1 = \dfrac{y-2}{2} = z - 1$.

a) Comproveu que són paral·leles.
[1 punt]

b) Calculeu l'equació vectorial del pla que les conté.
[1 punt]

Solució:

a)

Un vector director de *r* es pot obtenir amb el producte vectorial dels vectors normals dels dos plans: $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \equiv (2,4,2)$

Un vector director de *s* el tenim als denominadors de l'equació contínua: $\vec{v} = (1,2,1)$

Un punt de *s* és $P = (-1,2,1)$, que podem comprovar que no pertany a *r* ja que no satisfà la primera equació.

Com que els dos vectors directors són proporcionals i $P \notin r$, deduïm que les dues rectes són paral·leles.

b) Un punt de *r* és $Q = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

El pla buscat queda determinat pel punt $P = (-1,2,1)$ i pels vectors $\begin{cases} \overrightarrow{QP} = \left(-\frac{3}{2}, 2, 1\right) \\ \vec{v} = (1,2,1) \end{cases}$ i

la seva equació vectorial és:

$$\pi : (x,y,z) = (-1,2,1) + \lambda \cdot (1,2,1) + \mu \cdot \left(-\frac{3}{2}, 2, 1\right)$$