3. Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.
[1 punt]

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.
[1 punt]

Solució:

a) El pendent de la recta $x + 3y = 0$, és a dir $y = (-1/3)\,x$, és -1/3. Per a trobar una recta tangent paral·lela, cal trobar els punts en què la derivada de la funció és igual a -1/3.

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$3x^2 - 2x = -\frac{1}{3}$, per tant $9x^2 - 6x + 1 = 0$.
Resolent l'equació de segon grau, obtenim $x = \frac{1}{3}$.

Per a trobar la recta tangent demanada:
$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ (com ja sabíem)
$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{27}$

L'equació de la recta tangent és: $y + \frac{2}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ o, desenvolupant,
$\boxed{y = \frac{-x}{3} + \frac{1}{27}}$, o alternativament, $\boxed{9x + 27y = 1}$.

b) Per a calcular els punts de màxim o mínim i les inflexions ens cal tenir les derivades

$f(x) = x^3 - x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f''(x) = 6x - 2$

Per a calcular els candidats a màxim o mínim, resolem $f'(x)=0$, i obtenim $x = 0$ i $x = \frac{2}{3}$

Per a classificar aquest els punts singulars, els substituïm a la derivada segona:

$f''(0) = -2 < 0$, per tant, en $x = 0$ la funció té $\boxed{\text{un màxim relatiu, } M = (0,0)}$.

$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$, per tant, en $x = \frac{2}{3}$ la funció té $\boxed{\text{un mínim relatiu, } m = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)}$.

Per a obtenir els candidats a inflexió, resolem $f''(x)=0$, i obtenim $x = \frac{1}{3}$.

Per a decidir si és inflexió, mirem el signe de la derivada segona a l'entorn de l'abscissa $x = \frac{1}{3}$.

$f''(x) = 6x - 2$

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $\quad f'' < 0$,

$\left(\frac{1}{3}, +\infty,\right)$, $\quad f'' > 0$,

per tant, en $x = \frac{1}{3}$ hi ha un canvi de concavitat i, per tant, en aquest punt tenim l'única $\boxed{\text{inflexió, } I = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)}$.

Observació: A l'enunciat es demana "els punts de la gràfica", per tant, cal explicitar l'abscissa i l'ordenada dels punts. En el cas de contestar correctament només les abscisses, s'aplicarà **només una vegada** la penalització de 0,25 punts.

3. Sigui la funció $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, amb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

a) Calculeu els valors de *a* i de *b* que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$.

[1 punt]

b) Per al cas $a = 3$ i $b = 5$, calculeu l'asímptota horitzontal de la funció *f* quan *x* tendeix a $+\infty$.

[1 punt]

Solució:

a) Per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1, e)$ cal que la derivada primera de la funció f s'anul.li en el punt d'abscissa $x = 1$ i que la imatge de la funció en aquest punt sigui e, és a dir, $f'(1) = 0$ i $f(1) = e$.

$$f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$$

$$f'(x) = a(-2x + b)e^{-x^2+bx}$$

$$f'(1) = a(-2 + b)e^{-1+b} = 0$$

$$f(1) = ae^{-1+b} = e$$

De la primera igualtat com que $e^{-1+b} \neq 0$ aleshores deduïm que $a = 0$ o $b = 2$. Ara bé, si $a = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, per a qualsevol valor de *x*, per tant tenim que $\boxed{b = 2}$ i si substituïm a la segona equacio obtenim $f(1) = ae^{-1+2} = ae = e$ d'on deduïm que $\boxed{a = 1}$.

b) Si $a = 3$ i $b = 5$ aleshores tenim $f(x) = 3 \cdot e^{-x^2+5x}$.

Per a calcular l'asímptota horitzontal quan *x* tendeix a $+\infty$., hem de calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3 \cdot e^{-x^2+5x} = 3 \cdot e^{-\infty} = 0.$$

Per tant, la funció $\boxed{\text{té una asímptota horitzontal en l'eix de les } x\text{'s, } y = 0}$.

4. Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y = -124x + 249$ i que $f(-3) = -4$.

a) Calculeu $f''(2)$, $f'(2)$ i $f(2)$.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_{-3}^{2} f'(x)dx$.

[1 punt]

Solució:

a) Si la funció f té una inflexió en el punt d'abscissa $x = 2 \Rightarrow \boxed{f''(2) = 0}$.
El pendent de la recta tangent és la derivada, per tant si $y = -124x + 249$ és la recta tangent en $x = 2 \Rightarrow \boxed{f'(2) = -124}$. I la recta tangent coincideix amb la funció en el punt $x = 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = -124 \cdot 2 + 249 = 1}$.

b) Apliquem la regla de Barrow tenint en compte que la funció f és una primitiva de la funció f'.

$$\int_{-3}^{2} f'(x)dx = f(x)|_{-3}^{2} = f(2) - f(-3).$$

Per tant $\boxed{\int_{-3}^{2} f'(x)dx = 1 - (-4) = 5}$.