5. Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.
   a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval [0, 2] i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval (0, 2). Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.
   [1 punt]
   b) A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.
   [1 punt]

Buscatusclases

Solució:

a)

La funció $f(x)$ és contínua en l'interval tancat [0, 2] per tractar-se de suma de funcions contínues en el seu domini com són la funció arrel quadrada i les funcions polinòmiques.

Els valors en els extrems $f(0) = -2 < 0$ i $f(2) = \sqrt{2} > 0$ tenen signe diferent, és a dir, $f(0) \cdot f(2) < 0$, per tant, sí que es compleixen les condicions del teorema de Bolzano.

Així doncs, la funció canvia de signe dins l'interval indicat i, per tant, aplicant el teorema de Bolzano, com a mínim existeix un punt dins l'interval obert (0, 2) en què la seva imatge és zero.

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ i, per tant, efectivament $x = 1$ és solució de l'equació $f(x) = 0$.

La funció derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 > 0$ és positiva en tot el domini de la funció i per tant la funció $f(x)$ és estrictament creixent i, per tant, després de tallar l'eix de les abscisses una vegada, la gràfica no pot tornar-lo a tallar.

b)

Com que $x = 1$ és l'únic punt en què la funció talla l'eix de les abscisses, la funció $f(x)$ té signe constant en l'interval (0,1) i, per tant, l'àrea que es demana es pot calcular amb

$$A = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} + x - 2) \quad dx \right| = \left| \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 \right| = \left| \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right| = \left| \frac{-5}{6} \right| = \boxed{\frac{5}{6}\ u^2}$$

Observació: També es donarà per bona la resolució si l'estudiant planteja la integral sense el valor absolut i canvia el signe després d'haver vist el resultat negatiu. Es penalitzarà donar com a resposta de l'àrea un valor negatiu.

4. Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x = 2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y = -124x + 249$ i que $f(-3) = -4$.

a) Calculeu $f''(2)$, $f'(2)$ i $f(2)$.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_{-3}^{2} f'(x)dx$.

[1 punt]

Solució:

a) Si la funció f té una inflexió en el punt d'abscissa $x = 2 \Rightarrow \boxed{f''(2) = 0}$.
El pendent de la recta tangent és la derivada, per tant si $y = -124x + 249$ és la recta tangent en $x = 2 \Rightarrow \boxed{f'(2) = -124}$. I la recta tangent coincideix amb la funció en el punt $x = 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = -124 \cdot 2 + 249 = 1}$.

b) Apliquem la regla de Barrow tenint en compte que la funció f és una primitiva de la funció f'.

$$\int_{-3}^{2} f'(x)dx = f(x)|_{-3}^{2} = f(2) - f(-3).$$

Per tant $\boxed{\int_{-3}^{2} f'(x)dx = 1 - (-4) = 5}$.