1. Siguin les matrius $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calculeu $M \cdot N$ i comproveu que la matriu resultant no és invertible.

   [1 punt]

   b) Trobeu els valors de t per als quals la matriu $N \cdot M$ és invertible.

   [1 punt]

Solució:

a) $M\cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-t & t^2 & 2t-2 \end{pmatrix}$

$|M \cdot N| = 2t - t^2 - t^2 + 2t^2 - 2t = 0$ per tant la matriu $\boxed{\text{no és invertible (sigui quin sigui el valor de } t)}$.

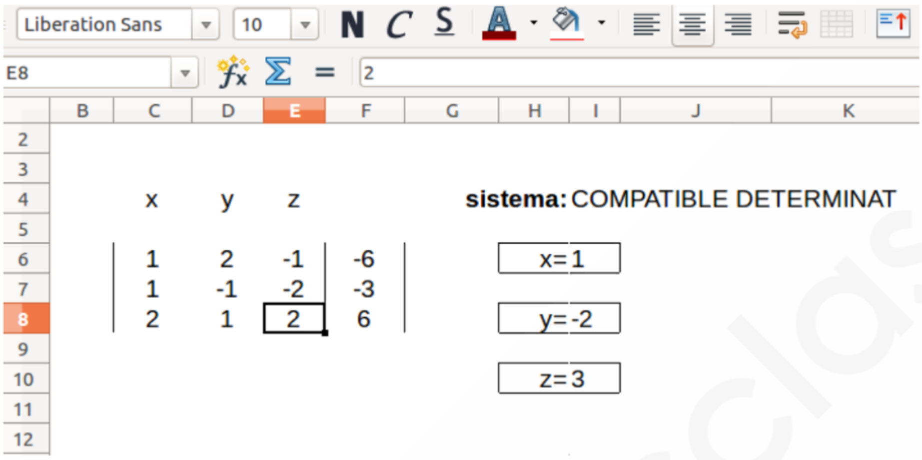
b) $N\cdot M = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{pmatrix}$

$|N \cdot M| = \begin{vmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{vmatrix} = -(1-t)\cdot(2-t).$

És immediat veure que el determinant s'anul·la per a $t = 1$ i $t = 2$.

$\boxed{\text{Per tant, la matriu és invertible per a qualsevol valor de } t \text{ diferent d'1 i 2.}}$

6. Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat de manera automàtica, com el de la figura següent:



a) Escriviu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.
[1 punt]

b) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cel·la E8 (a_{33} de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?
[1 punt]

Solució:

a)

El sistema és $\begin{cases} x+2y-z=-6 \\ x-y-2z=-3 \\ 2x+y+2z=6 \end{cases}$ i la solució $\begin{cases} 1+2\cdot(-2)-3=-6 \\ 1-(-2)-2\cdot 3=-3 \\ 2\cdot 1+(-2)+2\cdot 3=6 \end{cases}$ és correcta.

b)

Estudiem el rang de la matriu A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$ segons el paràmetre *t*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = -t-8-1-2+2-2t=-3t-9;\ -3t-9\neq 0,$$

és a dir, $t\neq -3$ tenim rang A=3 i, per tant, rang màxim i el sistema seria compatible determinat.

Què passa quan $t=-3$?

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\neq 0$, aleshores, rang A = 2.

Estudiem el rang de la matriu ampliada: $A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Sempre tenim el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -6-12-6-12+3-12\neq 0$, per tant, el rang de la matriu ampliada és 3.

Tenim, doncs, rang A = 2 i rang A'=3, per tant, el sistema és incompatible.

Aleshores el valor 2 emmarcat s'hauria de canviar per un -3.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{r} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=m \end{array}\right\} \quad \text{per a } m \in \mathbb{R}.$$

a) Expliqueu raonadament que per a qualsevol valor del paràmetre *m* el sistema té una única solució.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema i trobeu l'expressió general del punt solució.

[1 punt]

Solució:

a) Per a veure que per a qualsevol valor del paràmetre *m* el sistema té solució única, n'hi ha prou en veure que si A és la matriu dels coeficients dels sistema i A' la matriu ampliada aleshores $rang(A) = rang(A') = 3 =$ nombre d'incògnites independentment del valor del paràmetre *m*.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & m \end{pmatrix}$$

Com que $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 48 + 18 + 18 - 8 - 108 - 18 = -50 \neq 0 \Rightarrow$

$rang(A) = 3 \Rightarrow rang(A') = 3$ i per tant el sistema és compatible determinat, sigui quin sigui el valor del paràmetre m.

b) Podem resoldre el sistema pel mètode de Cràmer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{40 + 18 + 18m - 8m - 90 - 18}{-50} = \frac{10m - 50}{-50} = \frac{5 - m}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{36 + 6m + 30 - 6 - 36m - 30}{-50} = \frac{30 - 30m}{-50} = \frac{3m - 3}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & m \end{vmatrix}}{-50} = \frac{24m + 45 + 9 - 20 - 54 - 9m}{-50} = \frac{15m - 20}{-50} = \frac{4 - 3m}{10}$$

Per tant la solució del sistema és $\boxed{\left(\frac{5-m}{5}, \frac{3m-3}{5}, \frac{4-3m}{10}\right)}$

6. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 3, calculeu per a quins valors de k la matriu $A + kI$ té inversa. Trobeu, si existeix, la matriu inversa de $A - 2I$.

[1 punt]

b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $X \cdot A + A^t = 2 \cdot X$, en que A^t és la matriu transposta de la matriu A.

[1 punt]

Solució:

a) La matriu $A + kI$ té inversa si i només si $|A + kI| \neq 0$.

$$|A + kI| = \begin{vmatrix} -1+k & 0 & 1 \\ 0 & -1+k & 0 \\ 1 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = (1+k)(-1+k)^2 - (-1+k) =$$
$$= (k-1)\big((k+1)\cdot(k-1)-1\big) = (k-1)(k^2-1-1) = (k-1)(k^2-2).$$

Per tant, $|A + kI| \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{k \neq 1, \pm\sqrt{2}}$.

En particular, $A - 2I$ sí que és invertible, ja que correspon al cas $k = -2$.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2I| = -9 + 3 = -6$$

$$(A - 2I)^{-1} = \boxed{\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}}$$

b) $X \cdot A + A^t = 2 \cdot X$

$$X \cdot A - 2 \cdot X = -A^t$$
$$X(A - 2I) = -A^t$$
$$X(A-2I)(A-2I)^{-1} = -A^t(A-2I)^{-1}$$
$$X = -A^t(A-2I)^{-1}$$

$$X = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 6 & 4 & 12 \end{pmatrix}}$$