2. Sigui r la recta que passa pels punts $A = (0, 1, 1)$ i $B = (1, 1, -1)$.

a) Trobeu l'equació paramètrica de la recta r.
[1 punt]

b) Calculeu tots els punts de la recta r que estan a la mateixa distància dels plans $\pi_1: x + y = -2$ i $\pi_2: x - z = 1$
[1 punt]
Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Buscatusclases

Solució:

a) Recta per A = (0, 1, 1) i B = (1, 1, –1). Si agafem com a punt per on ha de passar la recta el punt A i com a vector director el vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, -2)$

(x, y, z) = (0, 1, 1) + t(1, 0, –2).

En forma paramètrica serà:

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}}$$

o equivalentment $\boxed{(x, y, z) = (t, 1, 1 - 2t)}$.

b) Plantegem la igualtat de les dues distàncies a partir dels punts de la recta en forma paramètrica:

$$\frac{|t + 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|t - 1 + 2t - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}$$

Eliminem els denominadors perquè són iguals i ens queda

$$|t + 3| = |3t - 2|$$

D'aquí obtenim dues possibilitats:

- $t + 3 = 3t - 2 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{P_1 = \left(\frac{5}{2}, 1, -4\right)}$

- $t + 3 = -3t + 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{P_2 = \left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right)}$

2. Siguin el pla d'equació $\pi: x + y - z = 0$ i el punt $P = (2, 3, 2)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt *P* respecte del pla π.

[1 punt]

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) dels dos plans paral·lels a π que estan a distància $\sqrt{3}$ del punt P.

[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades $(\mathrm{x_0}, \mathrm{y_0}, \mathrm{z_0})$ al pla d'equació $\mathrm{Ax + By + Cz + D = 0}$ amb l'expressió $\frac{|\mathrm{Ax_0+By_0+Cz_0+D}|}{\sqrt{\mathrm{A^2+B^2+C^2}}}$.

Buscatusclases

Solució:

a) Per a calcular el simètric de P, diguem-ne P', respecte del pla $\pi: x+y-z=0$ primer calcularem la projecció ortogonal del punt P sobre el pla π, diguem-ne Q, i després calcularem $P' = P + 2\cdot\overrightarrow{PQ}$.

La recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla té per vector director el vector normal del pla $(1,1,-1)$ i per tant té equació paramètrica

$$(x,y,z) = (2+\lambda, 3+\lambda, 2-\lambda).$$

Calculem la intersecció del pla π amb aquesta recta:

$$2+\lambda+3+\lambda-(2-\lambda)=0$$
$$3\lambda=-3$$
$$\lambda=-1 \Rightarrow Q=(1,2,3)$$

$$P' = (2,3,2) + 2\cdot\big((1,2,3)-(2,3,2)\big) = (2,3,2) + 2\cdot(-1,-1,1) = \boxed{(0,1,4)}.$$

Observació: També es pot buscar el punt P' imposant que sigui un punt que compleixi que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sigui proporcional al vector normal del pla i que el punt mig del segment $\overline{PP'}$ pertanyi al pla.

b) Si els plans han de ser paral.lels al pla $\pi: x+y-z=0$ aleshores hauran de tenir el mateix vector normal i per tant seran de la forma $\pi': x+y-z=D$.
Imposem ara que quedin a distància $\sqrt{3}$ del punt P.

$$d(P,\pi') = \frac{|2+3-2-D|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|3-D|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$
$$|3-D| = 3 \Rightarrow 3-D=3 \text{ o } 3-D=-3$$

- Si $3-D=3 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi': x+y-z=0}$.
- Si $3-D=-3 \Rightarrow D=6 \Rightarrow \boxed{\pi': x+y-z=6}$.

4. Considereu els punts $P = (3,-2,1)$, $Q = (5,0,3)$, $R = (1,2,3)$ i la recta

$$r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

a) Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma Ax + By + Cz = D) del pla que passa per P i Q i és paral·lel a la recta *r*.

[1 punt]

b) Donats el pla $x + 2y + m \cdot z = 7$ i el pla que passa per P, Q i R, trobeu *m* perquè siguin paral·lels i no coincidents.
[1 punt]

Solució:

a) Un vector direcció de r és: (1, 1, 0) × (0, 2, 3) = $\begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 1 & 2 \\ k & 0 & 3 \end{vmatrix}$ = (3, –3, 2) .

El vector $\overrightarrow{PQ}$ = Q- P = (2, 2, 2) o equivalentment (1, 1, 1).

Busquem un pla paral·lel als dos vectors que acabem de calcular, (3, -3, 2) i (1, 1, 1). Per tant, un vector normal del pla que busquem serà

$\vec{n}$ = (3, -3, 2) × (1, 1, 1) = (5, 1, -6).

L'equació del pla que passa per P i té vector normal $\vec{n}$ és:

5(x – 3) + (y +2) – 6 (z –1) = 0.

La seva equació general és $\boxed{5x + y - 6z = 7}$.

b) Calculem el vector $\overrightarrow{PQ}$ = Q - P = (2, 2, 2) o equivalentment (1, 1, 1) (si no s'ha fet en l'apartat anterior)

I el vector $\overrightarrow{PR}$ = R- P = (-2, 4, 2) o equivalentment (-1, 2, 1).

Calculem el vector normal al pla: $\vec{n}$ = (1, 1, 1) × (-1, 2, 1) = (-1, -2, 3).

Perquè els dos plans siguin paral·lels cal que els respectius vectors normals siguin proporcional, és a dir, que $\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{m}{3}$. Per tant, $\boxed{m = -3}$.

Comprovem que els plans no són coincidents perquè el punt P, per exemple, no hi pertany, x+2y-3z $\neq$7; efectivament 3-4-3 $\neq$7.

Observació: La comprovació de la no coincidència dels plans es pot provar també a partir de la no proporcionalitat dels termes independents.

5. Siguin les rectes $r_1: x-1 = \frac{y-2}{-1} = z-5$ i $r_2: (x,y,z) = (2-3\lambda, -1+\lambda, 2)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que conté la recta r_1 i és paral·lel a la recta r_2.

[1 punt]

b) Digueu quina condició s'ha de complir perquè existeixi un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2. Amb les rectes r_1 i r_2 de l'enunciat, comproveu si existeix un pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2.

[1 punt]

Buscatusclases

Solució:

a) $r_1: (x, y, z) = (1, 2, 5) + \mu(1, -1, 1)$ i $r_2: (x, y, z) = (2, -1, 2) + \lambda(-3, 1, 0)$
Si el pla ha de contenir la recta r_1 haurà de passar pel punt $(1, 2, 5)$ i contenir el vector $v_1 = (1, -1, 1)$ a la direcció del pla. I si el pla ha de quedar paral.lel a la recta r_2 també haurà de tenir el vector $v_2 = (-3, 1, 0)$ a la direcció.
Per tant el vector normal del pla serà $v_1 \times v_2$.

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & 1 & -3 \\ j & -1 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -3, -2) \sim (1, 3, 2)$$

Així l'equació cartesiana del pla serà $x + 3y + 2z = D$ i per obtenir D imposem que el pla passi pel punt $(1, 2, 5)$, és a dir $D = 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 17$. Per tant l'equació que ens demanen és $\boxed{x + 3y + 2z = 17}$.

b) Per tal que existeixi un pla que contingui una recta i quedi perpendicular a l'altra recta, les dues rectes inicials han de ser perpendiculars entre sí. En altres termes, els vectors directors de les rectes han de ser perpendiculars, és a dir, han de tenir producte escalar igual a zero.

En el nostre cas tenim

$$v_1 \cdot v_2 = (1, -1, 1) \cdot (-3, 1, 0) = -3 - 1 + 0 = -4 \neq 0.$$

i, per tant, no existeix cap pla que contingui la recta r_1 i sigui perpendicular a la recta r_2, ni a l'inrevés, ja que d'existir aleshores les dues rectes serien perpendiculars quan no ho són ja que el producte escalar dels seus vectors directors és diferent de 0.

Buscatusclases