4. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$.

a) Calculeu-ne el domini i estudieu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?
[1 punt]

b) Observeu que $f(-2)=-\dfrac{2}{3}$, $f(0)=4$ i $f(2)=-10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval $(-2,0)$ conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval $(0,2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.
[1 punt]

Solució:

a) En tractar-se d'una funció que és quocient de dos polinomis, el domini d'aquesta funció són tots els nombres reals excepte els que anul·len el denominador: $1-x=0 \rightarrow x=1$.

Per tant, $\text{Dom} f = \mathbf{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

La funció f és contínua en tot el seu domini ja que és quocient de polinomis, que són funcions contínues.

L'únic punt on pot presentar una asímptota vertical és en $x=1$ i, efectivament, ho és ja que:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^3-5x+4}{1-x}=+\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^3-5x+4}{1-x}=-\infty \end{array}\right\}$$

b) La funció presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x=1$. Podem aplicar el teorema de Bolzano per determinar un interval que contingui un zero de la funció, però aquest interval no pot contenir $x=1$.

Així doncs, quan apliquem el teorema de Bolzano a l'interval [-2, 0], podem afirmar que la funció té un zero a l'interval $(-2,0)$, ja que $f(-2)\cdot f(0)<0$ però no ho podem afirmar en l'interval $(0,2)$, ja que aquest interval conté el punt de discontinuïtat $x=1$.

Avaluant la funció per a $x=-1$, tindrem l'interval demanat:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=-\dfrac{2}{3}<0 \\ f(-1)=\dfrac{7}{2}>0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Per tant, aplicant el teorema de Bolzano a l'interval}$$

[-2,-1], l'interval $(-2,-1)$ conté un zero de la funció.

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + n & si\ 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{3x}{2} + m & x > 2 \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.
[1 punt]

b) Per al cas n = -4 i m = -6, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1 punt]

Solució:

a) La funció $f(x)$ està definida per trossos que són funcions contínues (exponencial i polinòmiques), per tant només cal estudiar la continuïtat en $x = 0$ i en $x = 2$.

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = a$ és necessari que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 = f(0) \\ \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2}{4} + n\right) = n \end{cases}$$

i

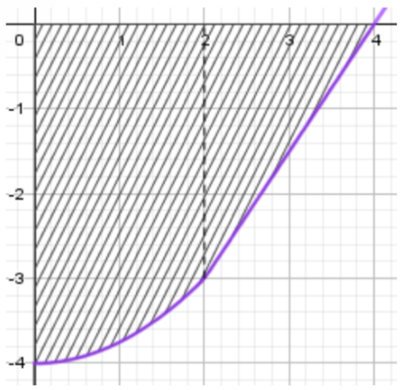
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{x^2}{4} + n\right) = 1 + n = f(2) \\ \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{3}{2}x + m\right) = 3 + m \end{cases}$$

Aleshores per a ser contínua en els dos punts cal que $\left.\begin{array}{r} n = 1 \\ 1 + n = 3 + m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} n = 1 \\ m = -1 \end{array}$

Per tant, si $n = 1$ i $m = -1$ la funció $f(x)$ és contínua per qualsevol nombre real.

b) Quan $n = -4$ i $m = -6$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \le 0 \\ \frac{x^2}{4} - 4 & si \quad 0 < x \le 2 \\ \frac{3}{2}x - 6 & si \quad x > 2 \end{cases}$$



Àrea

$$A = \left|\int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)dx\right| + \left|\int_2^4 \left(\frac{3}{2}x - 6\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{12} - 4x\right)\Big|_0^2\right| + \left|\left(\frac{3x^2}{4} - 6x\right)\Big|_2^4\right| = \left|\frac{2}{3} - 8\right| + |-3| = \frac{31}{3}u^2$$

Observació: Evidentment també es pot calcular l'àrea del segon tros com l'àrea del triangle.

6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a derivada segona $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.

   a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
   [1 punt]

   b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f.
   [1 punt]

Solució:

a) L'únic candidat a punt d'inflexió és el punt que anul.la la derivada segona, $x = 0$ i per estudiar els intervals de concavitat i convexitat només cal considerar els intervals $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$.

Com que $f''(x) < 0$ per $x < 0$ i $f''(x) > 0$ per $x > 0$ deduïm que la funció f és convexa ($\cap$) en $(-\infty, 0)$ i còncava ($\cup$) en $(0, \infty)$.

Observació: En cas de conflicte entre la terminologia i el grafisme prevaldrà la resposta gràfica.

Per tant la funció té un únic punt d'inflexió en $x = 0$.

D'altra banda, sabem que $f'(1) = 0$ ja que la recta tangent en $x = 1$ és horitzontal. Com $f''(1) = 6 > 0$ deduïm que es tracta d'un mínim relatiu de la funció.

b) Com $f''(x) = 6x$ tenim que integrant que $f'(x) = 3x^2 + c$, on c és una constant real. Ara bé, sabem que en $x = 1$ la recta tangent és horitzontal, així que $f'(1) = 0$. Substituint a l'expressió anterior obtenim que $c = -3$.

Integrant de nou deduïm que $f(x) = x^3 - 3x + k$, on k és una constant real. Com la recta tangent en $x = 1$ és $y = 5$, cal que $f(1) = 5$.

Això ens permet trobar el valor de la constant k:

$$f(1) = 1 - 3 + k = 5$$

d'on $k = 7$ i la funció buscada és $\boxed{f(x) = x^3 - 3x + 7}$.