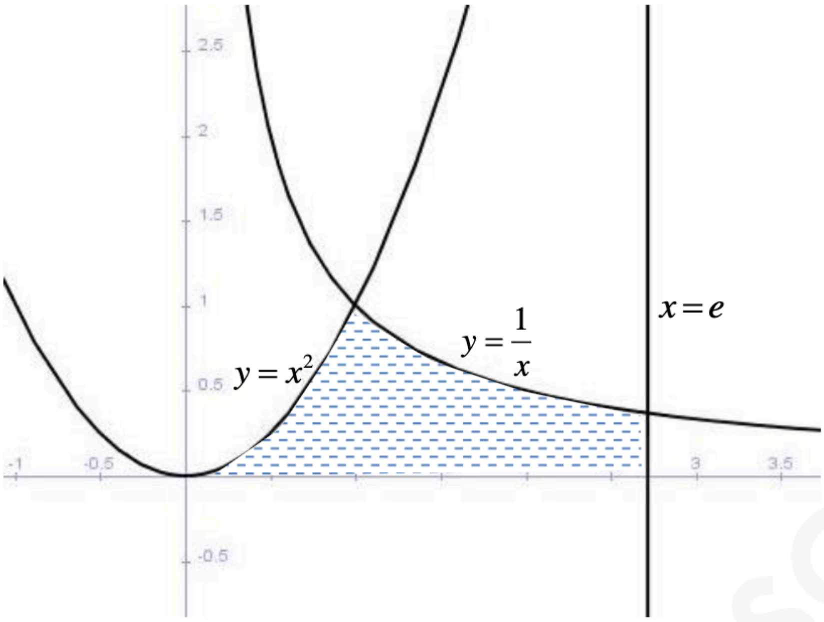
6. Considereu les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \dfrac{1}{x}$, i la recta $x = e$.

   a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de $y = f(x)$ amb $y = g(x)$.
   [1 punt]

   b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.
   [1 punt]

Solució:

a) No cal fer un estudi exhaustiu de cada gràfica. Poden fer l'esbós directament.



Calculem punts de tall:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \rightarrow x^2=\frac{1}{x} \rightarrow x^3=1 \rightarrow x=1 \rightarrow (1,1)$$

b) Cal expressar l'àrea amb la suma de dues integrals definides:

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^e g(x)\,dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^e \frac{1}{x}dx=\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\ln(x)\Big]_1^e=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}u^2$$

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + n & si\ 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{3x}{2} + m & x > 2 \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.
[1 punt]

b) Per al cas n = -4 i m = -6, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1 punt]

Solució:

a) La funció $f(x)$ està definida per trossos que són funcions contínues (exponencial i polinòmiques), per tant només cal estudiar la continuïtat en $x = 0$ i en $x = 2$.

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = a$ és necessari que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 = f(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x^2}{4} + n\right) = n \end{cases}$$

i

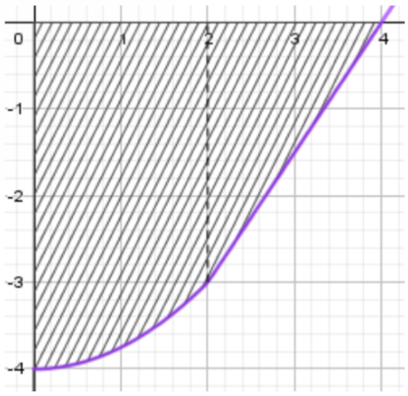
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{x^2}{4} + n\right) = 1 + n = f(2) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{3}{2}x + m\right) = 3 + m \end{cases}$$

Aleshores per a ser contínua en els dos punts cal que $\left.\begin{array}{r} n = 1 \\ 1 + n = 3 + m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n = 1 \\ m = -1 \end{array}$

Per tant, si $n = 1$ i $m = -1$ la funció $f(x)$ és contínua per qualsevol nombre real.

b) Quan $n = -4$ i $m = -6$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - 4 & si \quad 0 < x \le 2 \\ \dfrac{3}{2}x - 6 & si \quad x > 2 \end{cases}$$



Àrea

$$A = \left|\int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - 4\right) dx\right| + \left|\int_2^4 \left(\frac{3}{2}x - 6\right) dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{12} - 4x\right)\Bigg|_0^2\right| + \left|\left(\frac{3x^2}{4} - 6x\right)\Bigg|_2^4\right| = \left|\frac{2}{3} - 8\right| + |-3| = \frac{31}{3} u^2$$

Observació: Evidentment també es pot calcular l'àrea del segon tros com l'àrea del triangle.

6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a derivada segona $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.

   a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
   [1 punt]

   b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f.
   [1 punt]

Solució:

a) L'únic candidat a punt d'inflexió és el punt que anul.la la derivada segona, $x = 0$ i per estudiar els intervals de concavitat i convexitat només cal considerar els intervals $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$.

Com que $f''(x) < 0$ per $x < 0$ i $f''(x) > 0$ per $x > 0$ deduïm que la funció f és convexa ($\cap$) en $(-\infty, 0)$ i còncava ($\cup$) en $(0, \infty)$.

Observació: En cas de conflicte entre la terminologia i el grafisme prevaldrà la resposta gràfica.

Per tant la funció té un únic punt d'inflexió en $x = 0$.

D'altra banda, sabem que $f'(1) = 0$ ja que la recta tangent en $x = 1$ és horitzontal. Com $f''(1) = 6 > 0$ deduïm que es tracta d'un mínim relatiu de la funció.

b) Com $f''(x) = 6x$ tenim que integrant que $f'(x) = 3x^2 + c$, on c és una constant real. Ara bé, sabem que en $x = 1$ la recta tangent és horitzontal, així que $f'(1) = 0$. Substituint a l'expressió anterior obtenim que $c = -3$.

Integrant de nou deduïm que $f(x) = x^3 - 3x + k$, on k és una constant real. Com la recta tangent en $x = 1$ és $y = 5$, cal que $f(1) = 5$.

Això ens permet trobar el valor de la constant k:

$$f(1) = 1 - 3 + k = 5$$

d'on $k = 7$ i la funció buscada és $\boxed{f(x) = x^3 - 3x + 7}$.