2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k=-1$.
[1 punt]

Solució:

a) La matriu del sistema és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{array}\right)$. Igualem el determinant de la matriu de coeficients a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Cas 1: $k \neq \pm 1$. El sistema és compatible determinat det(A)≠0 i, per tant, $rg\left(A\right) = rg\left(\overline{A}\right) = 3 =$ nombre d'incògnites.

Cas 2: $k = 1$

$rg\left(A\right) = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} = 2$, ja que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0$.

$$rg\left(\overline{A}\right) = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

Cas 3: $k = -1$

$rg\left(A\right) = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} = 2$, ja que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0$.

$$rg\left(\overline{A}\right) = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Per tant, és un sistema compatible indeterminat, ja que $rg\left(A\right) = rg\left(\overline{A}\right) = 2 < 3$.

b) Si $k = -1$, el sistema d'equacions és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, ja que tenim 3 incògnites i el rang de les matrius és 2. Les solucions del sistema són:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + y + 3z = -2 \\ 3x + 7y + 7z = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + y + 3z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

5. Sigui la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2 - M - 2I = 0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.
[1 punt]

b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de *M* per al cas $a = \sqrt{2}$.
[1 punt]

Solució:

a) Imposem $M^2 - M - 2I = 0$:

$$M^2 - M - 2I = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2 & 0 \\ 0 & a^2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Els únics valors per als quals se satisfà la igualtat són $a^2 - 2 = 0 \rightarrow a = \pm\sqrt{2}$

b) Per a l'expressió general, operem la igualtat de l'apartat a:

$$M^2 - M - 2I = 0 \rightarrow M^2 - M = 2I \rightarrow M\left(M - I\right) = 2I \rightarrow M\,\frac{1}{2}\left(M - I\right) = I$$

Així doncs, d'aquesta darrera igualtat, deduïm $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)}$.

Per $a = \sqrt{2}$, se satisfà $M^2 - M - 2I = 0$, per tant podem aplicar el resultat anterior:

$$\boxed{M^{-1}} = \frac{1}{2}(M - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}$$

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

c) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1 punt]

d) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1 punt]

Solució:

a) El sistema en forma matricial és el següent:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Anem a calcular el rang(A) i rang(A') per als diferents valors del paràmetre a.

El rang(A) serà màxim quan el determinant de la matriu A sigui diferent de 0. Calculem el determinant de la matriu A.

$$\begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 5 - a - 7 = a^2 - a - 2$$

Quan resolem $a^2 - a - 2 = 0$ obtenim els valors $a = -1$ i $a = 2$.

- Cas $a \neq -1$ i $a \neq 2$.

$|A| \neq 0$ i per tant rang(A) = 3 = rang(A') = nombre d'incògnites, per tant el sistema és $\boxed{\text{Compatible Determinat}}$.

- Cas $a = -1$

Substituïm el valor d'a i obtenim:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Com que $|A| = 0$ aleshores rang(A) < 3, però com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, aleshores rang($A$) = 2.

Com que $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 14 = 15 \neq 0$, aleshores rang($A'$) = 3

Com que rang(A) ≠ rang(A'), aleshores el sistema és $\boxed{\text{Incompatible}}$.

- Cas $a = 2$

Substituïm el valor d'a i obtenim:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Com que $|A| = 0$ aleshores rang(A) < 3, però com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, aleshores rang($A$) = 2.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 14 = 0$, aleshores rang($A'$) = 2

Com que rang(A) = rang(A') = 2 < nombre d'incògnites, aleshores el sistema es $\boxed{\text{Compatible Indeterminat amb 1 (3-2=1) grau de llibertat}}$.

b) Cas $a = 2$

Substituïm el valor d'a i obtenim:

$$A' = A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Per aquest cas es tracta d'un sistema compatible indeterminat i, com s'ha vist, el sistema es pot reduir a les dues últimes equacions, ja que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ i rang A=rang A'=2.

Aleshores, traspassant el termes en z al terme independent, el sistema equivalent a resoldre és

$$\begin{cases} x + 2y & = & 3 - z \\ \quad y & = & -2 - z \end{cases}$$

que té per solució, $\boxed{y = -2-z}$ i, substituint la variable y a la primera equació, $\boxed{x} = 3-z-2(-2-z) = 3-z+4+2z = \boxed{7+z}$ amb el que tenim les variables x i y en funció de la variable z que fa de paràmetre i dóna el grau de llibertat al conjunt de solucions.