1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.
[2 punts]

Solució:

Si anomenem x l'amplada i y l'alçada de les pàgines, l'enunciat ens diu que la superfície de la pàgina ha de ser de 600 cm^2, és a dir que $xy = 600$.

Per tant, podem expressar l'alçada en funció de l'amplada, $y = \frac{600}{x}$.

L'amplada de l'àrea impresa serà, després de restar els marges laterals, x-4.

L'alçada de l'àrea impresa serà, després de restar els marges superior i inferior, y-5.

Per tant, la superfície a maximitzar és $S(x, y) = (x - 4)(y - 5)$.

Quan substituïm la y a l'expressió de S obtenim la superfície només en funció de x:

$$S(x) = (x-4)\left(\frac{600}{x} - 5\right) = 600 - 5x - \frac{2400}{x} + 20 = 620 - 5x - \frac{2400}{x}$$

Per a maximitzar S calculem primer les dues primeres derivades.

$$S'(x) = -5 + \frac{2400}{x^2}$$

$$S''(x) = -\frac{4800}{x^3}$$

Els candidats a màxim seran els punts que anul·lin la derivada primera, $S'(x)$. Quan fem $S'(x) = 0$, obtenim $5 = \frac{2400}{x^2}$ i, per tant, $x = +\sqrt{\frac{2400}{5}} = +\sqrt{480} = 4\sqrt{30}$.

(Observem que els valors negatius de x no tenen sentit per al problema.)

Per a comprovar que a $x = 4\sqrt{30}$ hi ha efectivament un màxim, substituïm el valor a la derivada segona i tenim $S''(4\sqrt{30}) < 0$. Per tant, l'amplada que maximitza l'àrea impresa és $\boxed{x = 4\sqrt{30} = 21{,}91\ cm}$.

L'alçada que li correspon serà $\boxed{y = \frac{600}{4\sqrt{30}} = \frac{600 \cdot \sqrt{30}}{4 \cdot 30} = 5\sqrt{30} = 27{,}39\ cm}$.

2. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de $2\ m^2$. Sabem que el preu de la fusta és de 7,5 €/m per als costats horitzontals i de 12,5 €/m per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?
[2 punts]

Solució:

Anomenem x a la mesura del costat horitzontal del rectangle i y a la mesura del costat vertical.

Atès que l'àrea del rectangle ha de ser de dos metres quadrats, sabem que $x \cdot y = 2$

La funció que facilita el cost a partir de la mesura dels costats és:

$$\mathrm{C}(x, y) = 7{,}5 \cdot 2x + 12{,}5 \cdot 2y = 15x + 25y$$

Com que $x \cdot y = 2$, sabem que $y = 2/x$ i, per tant, $\mathrm{C}(x) = 15x + 50/x$

Estudiem per a quin valor de $x > 0$ és mínima la funció cost:

$\mathrm{C}'(x) = 15 - 50/x^2$

$$\mathrm{C}'(x) = 0 \ \leftrightarrow 15 - \frac{50}{x^2} = 0 \ \leftrightarrow \ x = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$\mathrm{C}''(x) = 100/x^3$

$$\mathrm{C}''\left(x = \frac{\sqrt{30}}{3}\right) > 0 \quad \rightarrow \ \text{Mínim relatiu de } \mathrm{C}(x) \text{ quan } x = \frac{\sqrt{30}}{3} \ \text{ m}$$

$$y = \frac{2}{x} = \frac{2}{\frac{\sqrt{30}}{3}} = \frac{6}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{5} \ \text{ m}$$

Les dimensions que hem d'escollir per tal que el marc sigui el més econòmic possible són $x = \frac{\sqrt{30}}{3}$ m pel costat horitzontal i $y = \frac{\sqrt{30}}{5}$ m pel costat vertical del marc.

El cost més econòmic és

$$\mathrm{C}\left(x = \frac{\sqrt{30}}{3}, y = \frac{\sqrt{30}}{5}\right) = 15 \cdot \frac{\sqrt{30}}{3} + 25 \cdot \frac{\sqrt{30}}{5} = \boxed{10\sqrt{30}\ € \ \cong \ 54{,}77\ €}$$